KRITISCHES VERHALTEN IN DER KERNFRAGMENTATION

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Andreas Wörner
aus Mannheim

Frankfurt am Main
1995

vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe – Universität
als Dissertation angenommen.

Dekan:	Prof. Dr. D. Wolf
Gutachter:	Prof. Dr. U. Lynen
	Prof. Dr. R. Stock
Datum der Disputation:	18.08.1995

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Aussicht, Materie in einem Zustand zu produzieren, wie er in der prä-hadronischen Phase am Anfang unseres Universums vorhanden war und - vielleicht - immer noch in Neutronensternen existiert [Glen 92], stellt eines der Hauptmotive für das Studium von Kern-Kernkollisionen bei höchsten Energien dar. Dieser Übergang zum Quark-Gluon Plasma ist jedoch nur ein, wenn auch das spektakulärste, Beispiel für eine Zustandsänderung von Kernmaterie. Die Vielfalt potentieller Phasen nuklearer Materie, die wir aufgrund des Facettenreichtums der nuklearen Kraft erwarten, ist in Abbildung 1 gezeigt [Siem 84, Tama 93]. Aufgrund der Ähnlichkeit [Jaqa 83] der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und der van der Waals Kraft erwartet man bei Dichten unterhalb der Saturationsdichte und bei Anregungsenergien im Bereich der Bindungsenergie einen Phasenübergang zwischen einem flüssigen und gasförmigen Zustand der Kernmaterie. [Finn 82, Siem 83, Bert 83, Pana 84, Schl 87].

Bei der Suche nach Signalen eines solchen Flüssig-Gas-Phasenübergangs in Kernmaterie wird man jedoch mit zumindest vier Komplikationen konfrontiert, die in abgewandelter Form auch für alle anderen Phasenübergänge in Kernmaterie relevant sind:

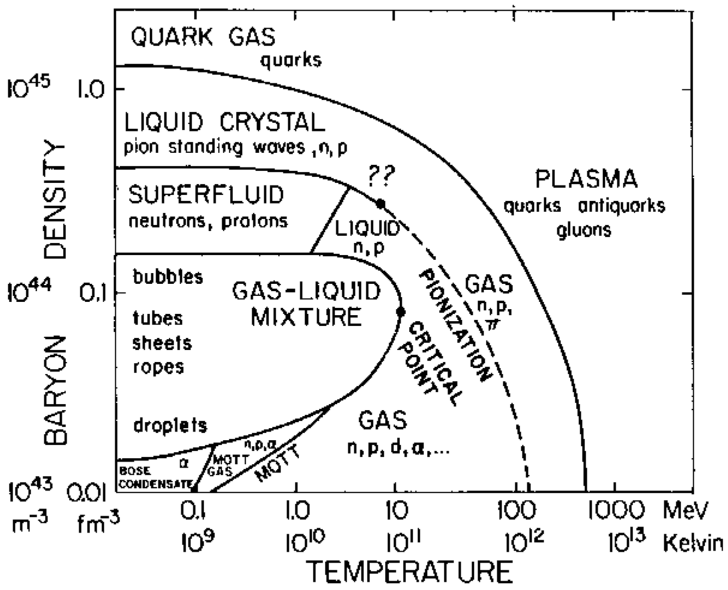

Abbildung 1: Mögliche Phasen nuklearer Materie [Siem 84].

1. Kerne bestehen nur aus einer sehr beschränkten Anzahl von Konstituenten. Für endliche Systeme erwartet man ein Ausschmieren des Phasenübergangs [Imry 80, Laba 90] und eine Reduktion der kritischen Temperatur von ihrem Wert für Kernmaterie von 15-20 MeV [Jaqa 83, Laba 90, Boal 90, Wang 94, Zhen 94].
2. Kerne sind geladen. Man erwartet, daß aufgrund der langreichweitigen Coulombabstoßung Instabilitäten entstehen [Levi 85], die zu einer merklichen Reduktion der kritischen Temperatur bis zu Werten um 5 MeV führen [Satp 89, Bond 85, Gross 93].
3. Kerne sind transiente Systeme ohne kontrollierbares äußeres Feld (z.B. Druck) und werden vor ihrem Aufbruch expandieren [Boal 86, Bert 83, Lope 84, Frie 90, Belk 94, Papp 94]. Die Aggregation in Fragmente führt zu einer effektiven Zustandsgleichung [Peil 91].
4. Kerne sind geschlossene Systeme ohne Wärmebad. Die Temperatur des Systems ist deshalb nicht vorbestimmt sondern muß aus experimentellen Observablen bestimmt werden.

Prinzipiell sind auch in sehr kleinen Systemen ($\sim$ 10 Kontituenten) Phasenübergänge wohldefiniert, unterscheidbar [Laba 90, Chen 92, Hüll 94, Wale 93] und sogar experimentell nachweisbar [Blüm 88], so daß auch bei der Untersuchung von Kernen Hoffnung besteht, eindeutige Signaturen eines Phasenübergangs zu finden.

Der Flüssig-Gas-Phasenübergang zeichnet sich gegenüber allen anderen potentiellen Übergängen in Kernmaterie dadurch aus, daß die Existenz beider Phasen - auf der einen Seite kalte Kerne, die sich in vielerlei Hinsicht wie Flüssigkeiten verhalten, auf der anderen Seite ein nukleares Gas, das aus ungebundenen Protonen, Neutronen und wenigen leichten komplexen Teilchen besteht - als gesichert betrachtet werden kann. Über das Interesse an dem Flüssig-Gas-Phasenübergang als solchem hinaus und dem möglichen Zusammenhang mit der nuklearen Wechselwirkung bei Dichten unterhalb normaler Kernmateriedichte, erhält daher die Suche nach diesem Übergang als Testfall für die experimentelle Identifikation eines Phasenübergangs in einem endlichen, transienten System zusätzliche Relevanz.

Im Falle eines Flüssig-Gas Systems spiegelt die Potenzgesetzabhängigkeit der Fragmentverteilung die Skaleninvarianz des Systems am kritischen Punkt wieder. Zu Beginn der der achtziger Jahre war die Beobachtung, daß die Produktionsionswirkungquerschnitte von Fragmenten mit Kernladungszahl Z einem Potenzgesetz $\sigma(Z) \propto Z^{-\tau}$ folgen [Finn 82], und die Vermutung [Siem 83], daß dies einen Phasenübergang zwischen flüssiger und gasförmiger Kernmaterie in der Nähe des kritischen Punktes [Fish 67] signalisieren könnte, die Ursache für das aufkommende Interesse an der Fragmentproduktion in Schwerionenstößen. Allerdings entwickeln sich viele dissipative, dynamische Systeme von selbst in einen kritischen Zustand ohne charakteristische Längenskala (selbstorganisierte Kritikalität [Bak 88, Bak 91]), ohne daß dabei ein Phasenübergang involviert ist. Schon zu Anfang des Jahrhunderts zeigte Lord Rayleigh [Rayl 14] diese Skaleninvarianz für die Fragmentation von Festkörpern. So ergeben Fragmentationsprozeße sehr oft eine Fragmentgrößenverteilung, die einem Potenzgesetz entspricht, unabhängig von der Art der relevanten Wechselwirkung oder der Größenskala [Bote 94]. Ebenfalls sind die τ-Parameter der verschiedenen Systeme sehr ähnlich. Als Beispiele seien hier aufgeführt :

- Meteoriten mittlerer Größe : τ=1.62 [McCr 68]
- Asteroiden : τ=2.02 [Dohn 70, Donn 84]
- Zerschmetterter Quartz,Gneiss oder Granit : τ=1.63, 1.71 bzw. 1.74 [Grad 85]
- Kies : τ=1.94 [Grad 85]

Das Auftreten eines Potenzgesetzes ist somit eine zwar notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür, daß die im Aufbruch angeregter Kerne erzeugten Fragmente einem System am kritischen Punkt entstammen und somit die Multifragmentation als das Analogon der bei Flüssigkeiten beobachteten kritischen Opaleszenz zu verstehen ist. Höhere Momente der Fragmentverteilung zeigen zwar ebenfalls ein Verhalten, das qualitativ dem entspricht, was man bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung erwartet [Camp 86], aber auch hier ist der Schluß, daß es sich dabei tatsächlich um einen solchen handelt nicht zwingend.

Geht man davon aus, daß die Ursache der im Aufbruch der Restkerne beobachteten Multifragmentation tatsächlich ein kritisches Phänomen ist, so stellt sich die Frage, welche für den Phasenübergang wesentlichen Größen sich aus den Fragmentverteilungen bestimmen lassen. Von Interesse sind zum einen die Lage des kritischen Punktes, zum anderen die Werte der kritischen Exponenten. Die kritischen Werte für Temperatur und Dichte stellen eine natürliche Skala der entsprechenden Größe dar. Dies drückt sich in dem Gesetz der korrespondierenden Zustände aus: Solange Druck, Temperatur und Dichte in Einheiten ihrer kritischen Werte gemessen werden, zeigen verschiedene Materialien identisches Verhalten. Zur Bestimmung dieser Werte bedarf es einer möglichst genauen Festlegung des

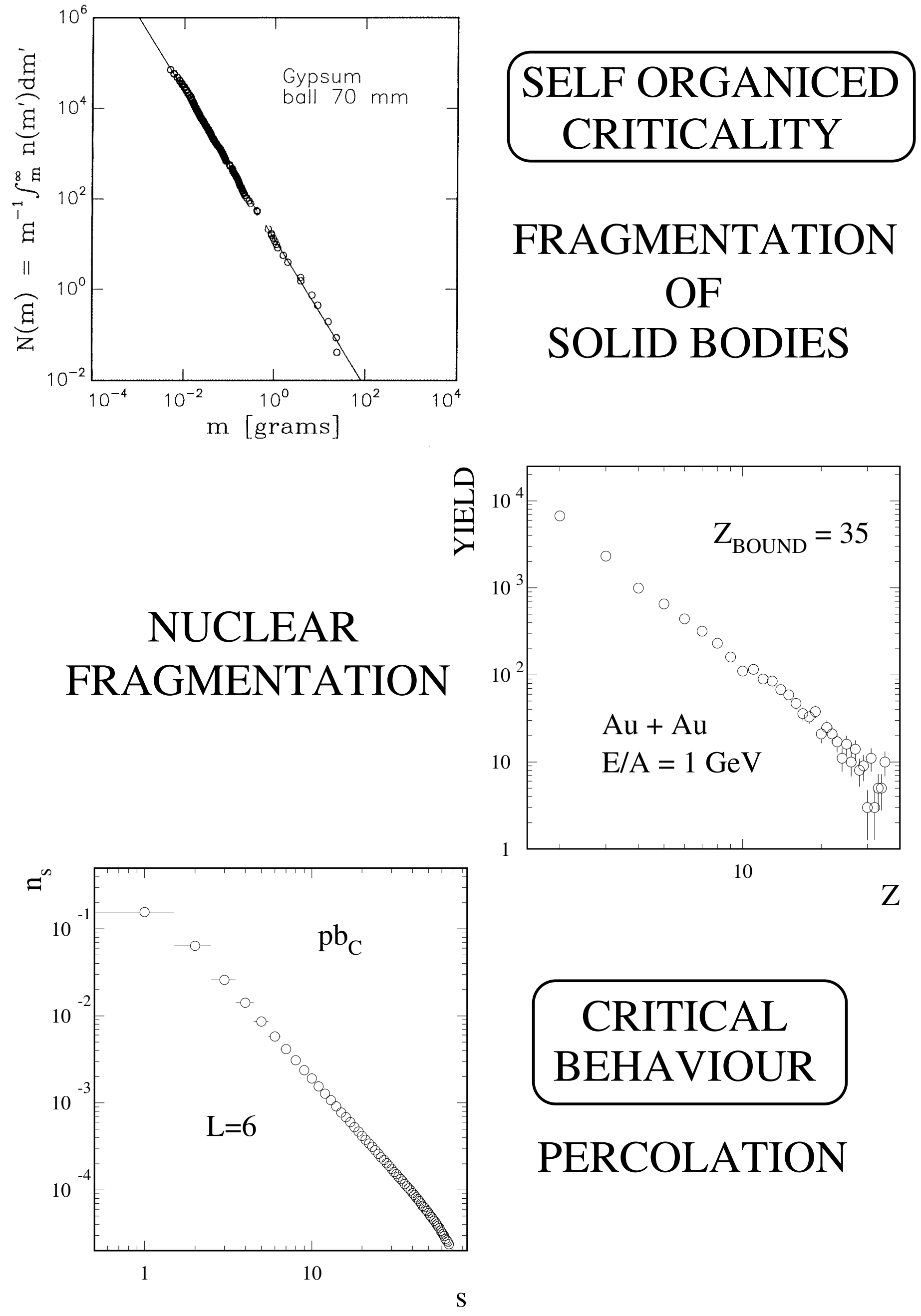

Abbildung 2: Fragmentgrößenverteilungen für Fragmente aus der Zertrümmerung einer Gipskugel [Odde 94] (oben), der Kernfragmentation (mitte) und des Perkolationsmodell am kritischen Punkt (unten). In allen drei Fällen zeigt die Fragmentgrößenverteilung die Form eines Potenzgesetzes.

Punktes, an dem der Phasenübergang stattfindet. Die das kritische Verhalten beschreibenden kritischen Exponenten erlauben eine Einordnung der Phasenübergänge in Universalitätsklassen. Die kritischen Exponenten γ und β beschreiben im Flüssig-Gas-System die Temperaturabhängigkeit der isothermen Kompressibilität beziehungsweise der Dichtedifferenz beider Phasen. Beides sind Größen, die dem Experiment nicht direkt zugänglich sind. Den Zusammenhang zwischen thermodynamischen Observablen und einer experimentellen Observablen, der Fragmentgrößenverteilung, liefert das Kondensationsmodell von Fisher [Fish 67]. Unter gewissen Annahmen kann gezeigt werden, daß für ein Flüssig-Gas System das größte Cluster und das zweite Moment der Größenverteilung das gleiche kritische Verhalten zeigen sollten, wie die Kompressibilität und die Dichtedifferenz.
Die ersten Versuche, Daten im Rahmen eines Flüssig-Gas Phasenübergangs zweiter Ordnung zu interpretieren, liefen deshalb über eine Anpassung der Vorhersagen dieses Modelles an gemessene Fragmentgrößenverteilungen [Finn 82, Gutb 82]. Die Ähnlichkeit der Fragmentverteilungen von Kernen mit den Verteilungen des Perkolationsmodells [Camp 86], führte zu dem Versuch, auch über die Momente der Verteilungen kritische Exponenten zu bestimmen. Neueres Interesse wurde durch den Versuch der EOS-Kollaboration ausgelöst, kritische Exponenten aus der Untersuchung der Fragmentation bei der Reaktion von Au+C bei E/A=1GeV zu bestimmen [Elli 94, Gilk 94].
Eine weitere Signatur des Phasenübergangs zeigt sich in der experimentell bestimmten kalorischen Kurve von Kernen (Abbildung 3). Sie kann in drei Abschnitte unterteilt werden : Einen Anstieg im Evaporationsbereich für Anregungsenergien unterhalb 2 MeV (Flüssig-Bereich), einem Plateau zwischen 2-10 MeV und einem linearen Anstieg für Anregungsenergien über 10 MeV, wie man es für ein Gas aus klassischen, elementaren Teilchen erwartet [Möhl 95]. Das Plateau der kalorischen Kurve zeigt ein Verhalten, das typisch für einen Phasenübergangs erster Ordnung mit einer substantiellen latenten Wärme ist. Dies scheint auf den ersten Blick die Beobachtung eines Übergangs zweiter Ordnung - das *sine qua non* für die Bestimmung kritischer Exponenten - auszuschließen. Andererseits ist für ein endliches System mit N Konstituenten der Übergang nicht länger durch einen einzelnen Punkt gegeben, sondern findet in einem endlichen Temperaturintervall ΔT_C um die Übergangstemperatur T_C statt. Im Falle eines Phasenübergangs zweiter Ordnung ist $\Delta T_C/T_C$ ungefähr durch $\Delta T_C/T_C \sim 1/\sqrt{N}$ gegeben [Imry 80]. Für eine typische Größe nuklearer Systeme von $N \approx 100$ bedeutet dies ein Ausschmieren des Übergangs in einer Umgebung von etwa 10% um den kritischen Wert. Desweiteren wächst die latente Wärme

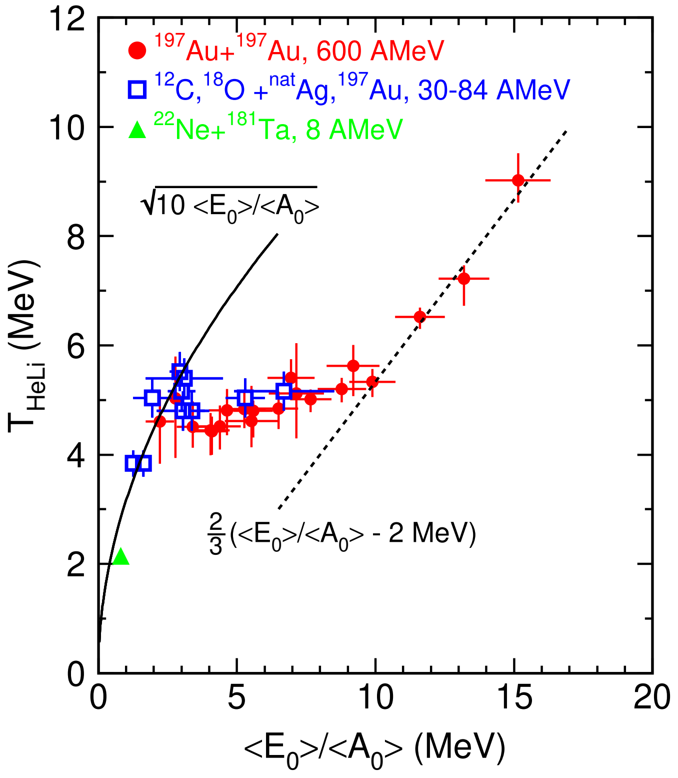

Abbildung 3: Kalorische Kurve von Kernen. Aufgetragen ist die aus den gemessenen Isotopen-Verhältnissen der He und Li Isotope bestimmte Temperatur gegen die Anregungsenergie pro Nukleon [Möhl 95, Poch 95].

für ein klassisches van der Waals Gas in der Nähe des kritischen Punktes mit $\sqrt{1 - T/T_C}$ und nimmt schon bei $T/T_C = 0.95$ Werte in der Größenordnung von $k_B T_C$ an. Die Beobachtung dieser für einen Übergang erster Ordnung typischen Signatur widerspricht daher in endlichen Systemen nicht unbedingt der Möglichkeit, daß man einen Phasenübergang in der Nähe des kritischen Punktes beobachtet.

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Methoden zur Extraktion kritischer Exponenten aus der Fragmentgrößenverteilung [Pana 84] und aus den Verteilungen [Elli 94, Gilk 94] bzw. den Korrelationen [Camp 86, Camp 88] zwischen der Größe des schwersten Fragments und des zweiten Moments der Fragmentverteilung untersucht. Die gleichen

Analysen werden ebenfalls auf die Daten des Perkolationsmodells angewandt. Das Perkolationsmodell stellt ein einfaches, theoretisches Fragmentationsmodell dar, das einen wohldefinierten Phasenübergang zweiter Ordnung mit bekanntem kritischen Punkt und Exponenten, beinhaltet [Stau 91]. Es ist in der Lage, wesentliche experimentelle Observablen sogar quantitativ zu reproduzieren [Baue 88, Kreu 92]. Seine Einfachheit erlaubt gleichzeitig auch die Berechnung großer Systeme, in der vorliegenden Arbeit bis zu einer Systemgröße von einer Million Konstituenten, was eine detaillierte Studie der Systemgrößenabhängigkeit der Resultate erlaubt. Damit eignet sich das Perkolationsmodell sehr gut, um für die Extraktion von kritischen Exponenten aus den Daten der Kernfragmentation vorgesehene Methoden zu testen, insbesondere in Bezug auf ihre Anwendbarkeit auf Systeme mit einer Kernen ($\sim$100 Nukleonen) vergleichbaren Größe.

2 Experimentelle Grundlage

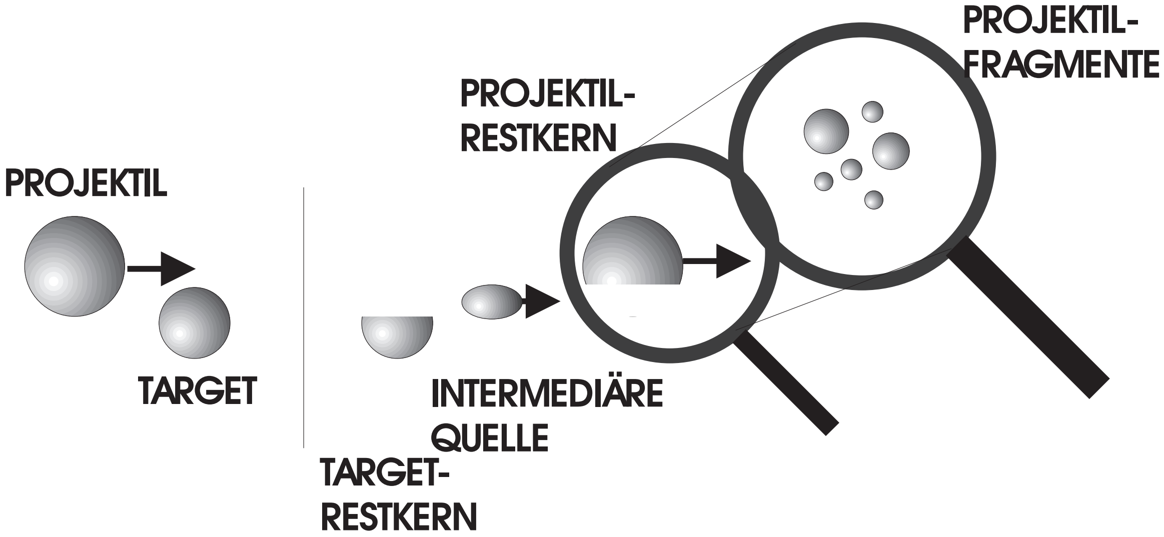

Abbildung 4: Schematische Darstellung einer relativistischen Schwerionenreaktion. Durch das Zusammentreffen von Projektil und Target entstehen drei kinematisch getrennte Quellen: Der Targetrestkern, eine intermediäre Quelle, aus der Überlappungszone von Projektil und Target, und der Projektilrestkern. Das ALADIN-Spektrometer eignet sich zur Untersuchung des Aufbruchs des Projektilrestkerns und ist in der Lage, alle aus dieser Quelle emittierten Teilchen nachzuweisen.

Ziel des im Frühjahr 1993 am Schwerionen-Synchrotron (SIS) der GSI, Darmstadt, durchgeführten Experimentes S114 ist die systematische Untersuchung des Aufbruchs des Projektilrestkernes in Schwerionenstößen bei relativistischen Projektilenergien.

Der Ablauf solcher Kollisionen kann anhand des *participant–spectator*–Modells [West 76] verdeutlicht werden (Abb. 4): Nur Nukleonen in der Überlappzone von Projektil und Target wechselwirken miteinander und bilden eine hochangeregte Reaktionszone. Die Nukleonen in den verbleibenden Target- und Projektilrestkernen verspüren zunächst wenig von der Kollision. Die Restkerne werden durch das Entfernen der die Reaktionszone bildenden Nukleonen aus dem Potentialtopf und durch im Verlauf der Reaktion aus der Reaktionszone hineingestreute Nukleonen angeregt. Aus der Reaktion entwickeln sich drei Quellen: Der nahezu ruhende Targetrestkern, die Reaktionszone (intermediäre Quelle), aus der bei symmetrischen Systemen Teilchen mit etwa halber Strahlrapidität emittiert werden und der Projektilrest, der nur wenig abgebremst wird. Bei den im Experiment verwendeten Einschußenergien von E/A>600 MeV sind diese Quellen kinematisch getrennt. Die beim anschließenden Zerfall des Projektilrestkernes entstehenden Fragmente bewegen sich etwa mit Strahlgeschwindigkeit und sind kinematisch stark nach vorne fokussiert. So lassen sich diese Fragmente mit vollständiger Effizienz und guter geometrischen Akzeptanz in den Detektoren nachweisen. Für ihren Nachweis wurde das ALADIN–Spektrometer eingesetzt; es ermöglicht die Bestimmung von Ladung, Masse und Impuls aller aus der Projektilquelle emittierten Fragmente.

2.1 Das ALADIN Spektrometer

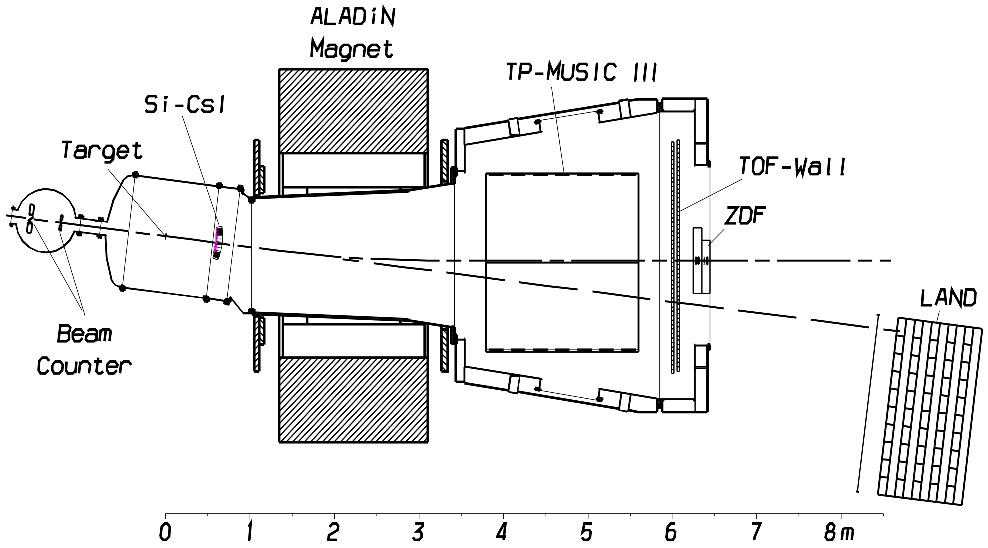

Abbildung 5: Skizze des ALADIN–Spektrometers für das Experiment S114. Der Strahl trifft von links her nach Passieren der Strahlzähler auf das Target. Im Magneten werden die Fragmente nach ihrer magnetischen Steifigkeit abgelenkt. Ihre Teilchenspur wird danach in der TP-MUSIC III nachgewiesen. Die Geschwindigkeit der Projektilfragmente wird von der Flugzeitwand (TOF) gemessen. Zum Nachweis der leichten Teilchen mittlerer Rapidität befand sich ein SiCsJ-Hodoskop im Winkelbereich von $5^o - 16^o$ in Vorwärtsrichtung um das Target. Die in der Reaktion erzeugten Neutronen werden mit dem Neutronendetektor LAND nachgewiesen.

Das ALADIN-Spektrometer [Alad 88] ist in Abbildung 5 skizziert. Mit diesem Aufbau kann die Ladung, Impulsvektor und Masse aller Projektilfragmente bestimmt werden. Dies erlaubt eine vollständige kinematische Rekonstruktion der Multifragmentationsereignisse. Die im Experiment untersuchten Projektil–Einschußenergie–Target–Kombinationen sind in Tabelle 1 aufgeführt. Pro System und Energie wurden im Durchschnitt etwa 100000 Ereignisse aufgenommen.

Der von links kommende Strahl trifft zunächst auf die Strahlzähler [Kemp 93]. Sie bestimmen an welcher Position und zu welchem Zeitpunkt ein Strahlteilchen das Target getroffen hat. Der den Zeitpunkt messende Startzähler besteht aus einer 76 μm dicken

PROJEKTIL	E/A MeV	TARGET						
		$^{9}_{4}$Be	$^{12}_{6}$C	$^{27}_{13}$Al	$^{63}_{29}$Cu	$^{115}_{49}$In	$^{197}_{79}$Au	$^{238}_{92}$U
$^{131}_{54}$Xe	600		●	●	●	●	●	
$^{197}_{79}$Au	600	●	●	●	●	●	●	
	800			●	●		●	
	1000	●	●	●	●	●	●	
$^{238}_{92}$U	600	●	●	●	●	●	●	●
	1000	●	●	●	●	●	●	●

Targetdicke [mg/cm^2]		187 ± 2	195 ± 8	392 ± 3	418 ± 2	800 ± 10	478 ± 9	483 ± 9
σ_{geom} [barn]	Xe	2.32	2.46	2.95	3.71	4.47	5.37	5.75
	Au	2.82	2.97	3.52	4.34	5.16	6.13	6.53
	U	3.10	3.26	3.83	4.68	5.53	6.53	6.95
P_{Reakt} [%]	Xe	2.9	2.4	2.6	1.5	1.9	0.8	0.7
	Au	3.5	2.9	3.1	1.7	2.2	0.9	0.8
	U	3.9	3.2	3.3	1.9	2.3	1.0	0.8

Tabelle 1: Die im Experiment S114 untersuchten Projektil–Einschußenergie–Target–Kombinationen sind in der oberen Tabellenhälfte durch das Symbol • gekennzeichnet. Im unteren Abschnitt ist die Massenbelegung der im Experiment verwendeten Targets, sowie der nach $\sigma_{geom} = \pi \cdot (1.2fm \cdot (A_P^{1/3} + A_T^{1/3}))^2$ berechnete geometrische Wirkungsquerschnitt für nukleare Reaktionen und die daraus resultierende Reaktionswahrscheinlichkeit P_{Reakt} aufgeführt.

Szintillatorfolie, die in einem Winkel von 45° zur Strahlachse steht und von zwei senkrecht zur Strahlachse stehenden Fotovervielfachern ausgelesen wird. Mit dieser Anordnung ließ sich eine Zeitauflösung von 100 ps Halbwertsbreite (FWHM) erreichen. Zur Bestimmung des Durchflugortes wird eine 50 μm dicke Szintillatorfolie verwendet, welche an allen vier Kanten von Fotovervielfachern ausgelesen wird. Die Genauigkeit der Ortsbestimmung betrug 2 mm (FWHM). Die Massenbelegung der beiden Strahlzähler betrug mit 19 mg/cm^2 in etwa 10% des leichtesten Targets.

Die im Experiment S114 verwendeten Targets und ihre Massenbelegung sind in Tabelle 1 aufgeführt. Die Reaktionswahrscheinlichkeit für die verschiedenen Systeme liegt zwischen 1 und 4 %.

Das sich in einem Vorwärtswinkelbereich von $5^o - 16^o$ hinter dem Target befindenden SiCsJ-Hodoskop hat die Aufgabe, die leichten Teilchen mittlerer Rapidität aus der Reaktionszone nachzuweisen. Es ist aus 84 $3 \times 3cm^2$ großen Elementen aufgebaut, jedes bestehend aus einem 300 μm dicken Siliziumzähler und einem 6 cm langen CsJ-Kristall, der von einer Photodiode ausgelesen wird. Die untere Nachweisschwelle liegt bei 10 AMeV, H- und He-Kerne können bis zu einer Energie von 150 AMeV gestoppt werden. In diesem Energiebereich ist eine Teilchenidentifikation nach dem ΔE-E-Prinzip möglich. Bei den im Experiment verwendeten Einschußenergien von 600 AMeV bis 1 AGeV haben die meisten Teilchen mittlerer Rapidität eine größere Energie als 150 AMeV, daher ist nur eine bedingte Trennung nach Ladung Z=1,Z=2 und $Z > 2$ möglich, so daß im Allgemeinen nur die Multiplizität dieser leichten Teilchen in der Analyse verwendet wurde.

Der Dipolmagnet des ALADIN-Spektrometers hat eine Apertur von $1.5 \times 0.5m^2$ und ein Biegevermögen von maximal 2.3 Tm. In ihm werden die Fragmente nach ihrer magnetischen Steifigkeit abgelenkt. Während der Messung wurde der Magnetstrom so eingestellt, daß der um $\sim 8^o$ abgelenkte Strahl genau auf den Zentraldetektor der Flugzeitwand traf. Direkt hinter dem Magneten schließt sich die Detektorkammer des ALADIN-Spektrometers an. Um Streung und Energieverlust der Fragmente zu vermeiden ist das gesamte Spektrometer bis hierhin evakuiert.

In der Detektorkammer befindet sich die TP-MUSIC III (Time Projection - MUltiple Sampling Ionization Chamber), in der die Teilchenspuren der Fragmente nachgewiesen werden. Sie ist in Abbildung 6 skizziert. Die TP-MUSIC besteht aus einem Feldkäfig mit einem aktiven Volumen von $2 \times 1 \times 1.8m^3$, der durch die sich in der Mitte befindende Kathode in zwei gleich große Drifträume aufgeteilt wird. Jeder Driftraum besitzt 2 Ionisationskammerabschnitte (IC1,IC2) und 3 Vieldrahtproportionalzählermodule (MWPC1..3). Die MUSIC wurde im Experiment mit einem Argon-Methan-Gemisch (P10: $90\%_{vol}Argon, 10\%_{vol}Methan$) bei Atmosphärendruck im Durchfluß betrieben. Die elektrische Feldstärke betrug 18 kV/m, woraus eine Driftgeschwindigkeit der Elektronen von $v_{drift} \sim 5cm/\mu s$ resultierte.

Geladene Teilchen erzeugen beim Durchflug durch das Zählgas erzeugen diese eine Teilchenspur aus Elektron-Ionen-Paaren. Die pro Weglänge erzeugte Anzahl ist dabei nach Bethe-Bloch proportional zu Z^2/β^2. Die Elektronen driften durch das angelegte, homoge-

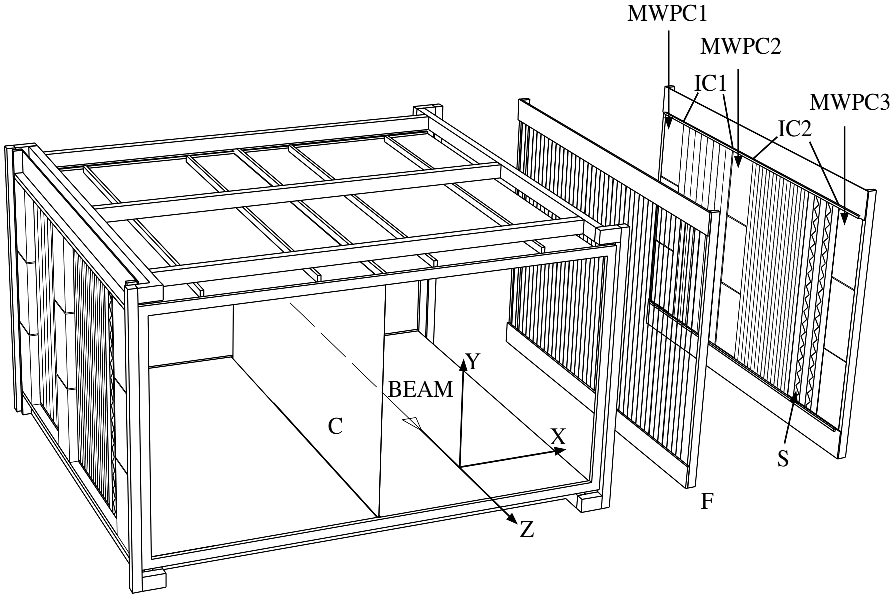

Abbildung 6: Aufbau der TP-MUSIC III : Zu erkennen sind die das Detektorvolumen teilende Kathode (C), das Frisch-Gitter (F), sowie die Ausleseeinheiten (MWPC1..3,IC1..2). Die Proportionalzählermodule (MWPC1..3) bestehen aus je 3 übereinander angeordneten Vieldrahtproportionalzählern. Der erste Ionisationskammerabschnitt (IC1) besitzt 8 6 cm breite Anodenstreifen, der zweite (IC2) 16 3 cm breite Anodenstreifen und 2 Doppelsägezahnstrukturen (S), die zur Kalibrierung der y-Positionsmessung der MWPC benutzt werden. Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß die z-Achse in Strahlrichtung, die y-Achse nach oben und die x-Achse in Strahlrichtung blickend nach links zeigt, so daß sich ein rechtshändiges Koordinatensystem ergibt.

ne, elektrische Feld auf die Anoden zu . Nach Passieren des Frisch-Gitters induzieren die driftenden Elektronen ein Signal auf den Anoden. Das Signal jeder einzelnen Anode wird mit einem direkt an der Anodenplatte montierten, ladungsempfindlichen Vorverstärker verstärkt und nach Pulsformung mit einem Hauptverstärker durch ein FADC-System mit einer Abtastrate von 16 MHz und 8bit Amplitudendiskretisierung aufgezeichnet. Dies ermöglicht eine Messung der Fragmentladung aus den Signalampliutuden und der Teilchenspurprojektion auf die x-z-Ebene, x(z), aus den Driftzeiten (zur Orientierung des Koordinatensystems siehe Abbildung 6). Das Eigenrauschen der Vorverstärker in Verbindung mit den großen Anodenkapazitäten bedingt eine untere Schwelle von $Z > 8$ aufgrund des Signal zu Rausch Verhältnisses. Diese Lücke zu leichteren Teilchen wird von den Proportionalzählern, die im Experiment mit einer Gasverstärkung von ~ 600 betrieben wurden, bis hinunter zu Alpha-Teilchen geschlossen. Die horizontal angeordneten Anodendrähte der MWPC sind über eine Widerstandskette, die an beiden Enden mit ladungsempfindlichen Vorverstärkern ausgelesen wird, miteinander verbunden [Rose 92]. Durch diese Ladungsteilungsauslese läßt sich der Durchstoßpunkt der Teilchenspur (x,y) in der Zählerebene (z=const) für alle Teilchen bestimmen. Aus der großen Variation der Primärionisation (Z=2,92) und der Ladungsteilungsauslese resultiert der große dynamische Bereich der Proportionalzählersignale von 1:10000. Um diesem gerecht zu werden wurde jedes Signal parallel mit drei relativen Verstärkungen von 1:6:36 verstärkt und in drei FADC-Kanälen digitalisiert.

Die Driftgeschwindigkeit der bei der Primärionisation erzeugten Ionen ist etwa 4 Größenordnungen kleiner, so daß diese lange im aktiven Detektorvolumen verbleiben und zu Feldverzerrungen führen. Da auch der gesamte Strahl das aktive Detektorvolumen passiert, beschränkt dies die Strahlrate auf einige Tausend pro Sekunde. Insbesondere muß auch verhindert werden, daß die bei der Gasverstärkung in den Proportionalzählern entstehenden Ionen in den Driftraum gelangen können [Mang 92]. Dies wird mit einem Schaltgitter in den MWPC erreicht, bei dem die Drähte alternierend auf zwei um 160V unterschiedliche Potentiale gelegt werden, was ein Durchdriften von Elektronen und Ionen verhindert und so den Zähler sperrt [Rose 92]. Mit Hilfe einer eigens dafür entwickelten Treiberschaltung lies sich innerhalb von $2\mu s$ der Zähler öffnen (dies erzeugt eine ca. 10 cm grosse inaktive Zone) und nach der maximalen Driftzeit wieder schließen, wobei die durch die Schaltströme (in der Größenordnung Ampere) auf den Anodendrähten der Proportionalzähler induzierten Störsignale klein gehalten werden konnten, um die Messung der leichten Teilchen zu ermöglichen.

Hinter der TP-MUSIC schließt die Flugzeitwand (TOF) den experimentellen Aufbau ab. Sie besteht aus 2 Wänden mit je 96 Szintillatorstäben, die gegeneinander um eine halbe Stabbreite vesetzt sind, so daß keine toten Zonen entstehen. Zur Abschirmung von δ-Elektronen befindet sich vor jeder Wand ein Messingblech von 0.5 mm Stärke. Die Stäbe haben die Abmessungen von $1100 \times 25 \times 10 mm^3$ und werden an beiden Enden von Fotovervielfachern ausgelesen. Für jedes Signal wird das mit einem QDC gewonnene Ladungsintegral und die mit einem Constant-Fraction Diskriminator und einem TDC mit 25 ps Diskretisierung gewonnene Zeitinformation relativ zum Strahlzähler aufgenommen. Somit läßt sich für jedes Teilchen, das die Flugzeitwand durchfliegt, die Flugzeit (aus dem Zeitmittelwert), die Höhe y des Durchflugortes (aus der Zeitdifferenz) und die Ladung nach der ΔE-t-Methode (aus dem geometrischen Mittel beider Amplituden und der Flugzeit) gewinnen.

In beiden Wänden wurden jeweils in den beiden zentralen Stäben ein 5 cm langes Stück in der Mitte herausgenommen, und die so entstandenen Enden mit einer Lichtleiterkonstruktion aus dünner, verspiegelter Kevlarfolie optisch miteinander verbunden, was ihre Funktionsfähigkeit nicht beeinträchtigte [Groß 94]. Dadurch konnten Strahlteilchen ungehindert zum Zentraldetektor der Flugzeitwand (ZDF) gelangen. Er besteht aus einer 4 mm dicken Szintillatorplatte, die an allen vier Kanten durch Fotoverfielfacher ausgelesen wird, einem $300\mu m$ dicken Siliziumstreifenzählern und einem aus 2 mm starken Szintillationsfasern aufgebauten Faserzähler [Groß 94]. Bei dieser Analyse wurde nur die durch Mittelung der Amplituden gewonnen Ladungsinformation des Plattenzählers verwendet.

Der Raum der Detektorkammer, in der sich die Flugzeitwand und ihr Zentraldetektor befinden, ist zur Erhöhung der Hochspannungsfestigkeit mit Stickstoff bei Atmosphärendruck gefüllt und zur TP-MUSIC hin durch ein Fenster getrennt.

Zur Messung der bei der Reaktion von der Projektilquelle emittierten Neutronen befindet sich in 0^o-Richtung etwa 8 m hinter dem Target der Neutronendetektor LAND (Large Area Neutron Detector) [Blai 91][Zude 95]. Der von ihm abgedeckte Winkelbereich beträgt $[-2.2^o, +11.0^o]$ in horizontaler und $\pm 4.1^o$ in vertikaler Richtung.

Als Wechselwirkungstrigger wird verlangt, daß in Koinzidenz mit einem in den Strahlzählern nachgewiesenen Strahlteilchen kein Teilchen mit einer Ladungsamplitude des Strahls im Zentraldetektor (ZDF) nachgewiesen wird. Ereignisse, bei denen gleichzeitig mit einem strahlähnlichen Teilchen im ZDF ein schweres Teilchen in einem der dem ZDF benachbarten Flugzeitwandstäben ein Teilchen nachgewiesen wird, führen ebenso zur Auslösung des Triggers. Letztere Bedingung ist notwendig, da sich ZDF und Flugzeitwand überdecken und so ein Teilchen, das zuerst die Flugzeitwand durchquert hat, einen größeren Energieverlust im ZDF erzeugt, als ein direkt in den Zentraldetektor gelangtes Teilchen. In einem Fast-Clear-Entscheidungsprozeß muß zudem noch im SiCsJ-Hodoskop mindestens ein Detektor angesprochen haben. Ereignisse, bei denen dies nicht der Fall war, wurden nur mit unterdrückter Zählrate aufgenommen.

2.2 Meßgrößen

In den Analysen dieser Arbeit wurden ausschließlich die gemessenen Ladungen der Fragmente verwendet, deshalb beschränkt sich dieser Abschnitt auch auf die Ladungsidentifizierung. Angaben zur Bestimmung des Impulses aus den Spurinformationen der MUSIC und der Proportionalzähler, sowie zur Bestimmung der Fragmentmassen aus gemessenen Impuls und aus der Flugzeit berechneter Geschwindigkeit, finden sich in den Doktorarbeiten [Möhl 95] und [Rube 95]. Dort wird auch die Kalibrierung der MUSIC-Daten beschrieben, eine Beschreibung der Flugzeitwand-Kalibration ist in [Schü 95, Ocke 93] enthalten.

Die Ladung eines Fragmentes wird sowohl von der Flugzeitwand, als auch von dem MUSIC-Detektor gemessen. Die Ladungidentifikation erfolgt in beiden Fällen nach der ΔE-t-Methode. Die von der MUSIC nachgewiesenen Fragmente mit $Z \geq 8$ weisen eine schmale Geschwindigkeitsverteilung um die Strahlgeschwindigkeit auf (siehe Abb. 10).

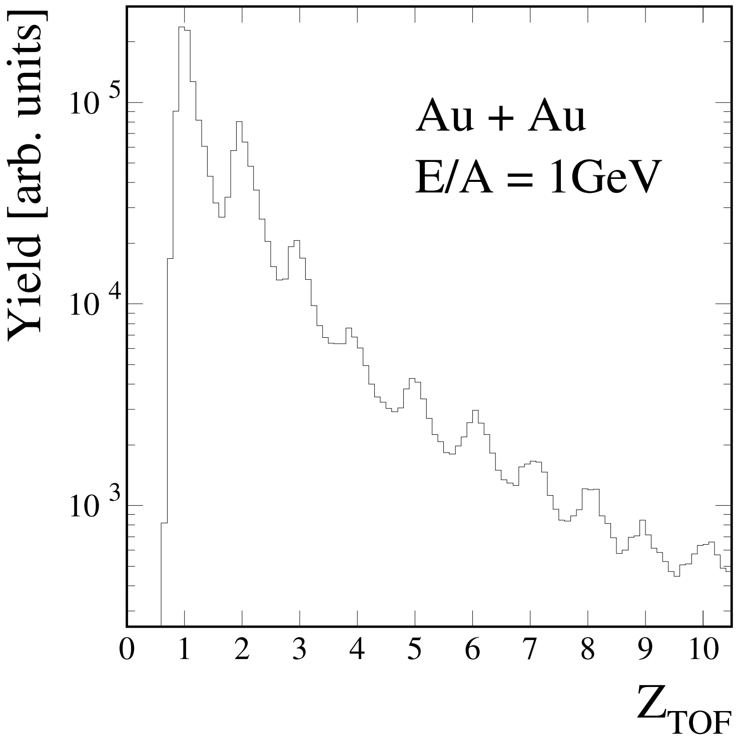

Abbildung 7: Ladungsspektrum der Flugzeitwand.

Für sie ist die Ladung im wesentlichen durch die Wurzel aus der Amplitude gegeben ($\Delta E \sim Z^2$), die Berücksichtigung der Geschwindigkeit stellt nur eine kleine Korrektur dar.

Ladungspektren der beiden Detektoren für die Reaktion Au+Au bei einer Strahlenergie von E/A=1GeV sind in Abbildung 7 für die Flugzeitwand und in Abbildung 8 für den MUSIC-Detektor gezeigt. Die Schwelle der Flugzeitwand liegt innerhalb der Protonen, so daß erst für $Z \geq 2$ alle in die Akzeptanz der Flugzeitwand emittierten Teilchen vollständig nachgewiesen werden.

Der MUSIC-Detektor besitzt eine Einzelladungauflösung im gesamten Bereich der von ihm nachgewiesenen Fragmente, die Flugzeitwand ist in der Lage Fragmentladungen bis hinauf zu $Z \approx 10$ einzeln zu trennen. Die Ladungsauflösung der einzelnen Detektoren ist in Abbildung 9 dargestellt. Die Auflösung der Flugzeitwand im Bereich größerer Ladungen wurde durch Vergleich mit der von der MUSIC gemessenen Ladung bestimmt.

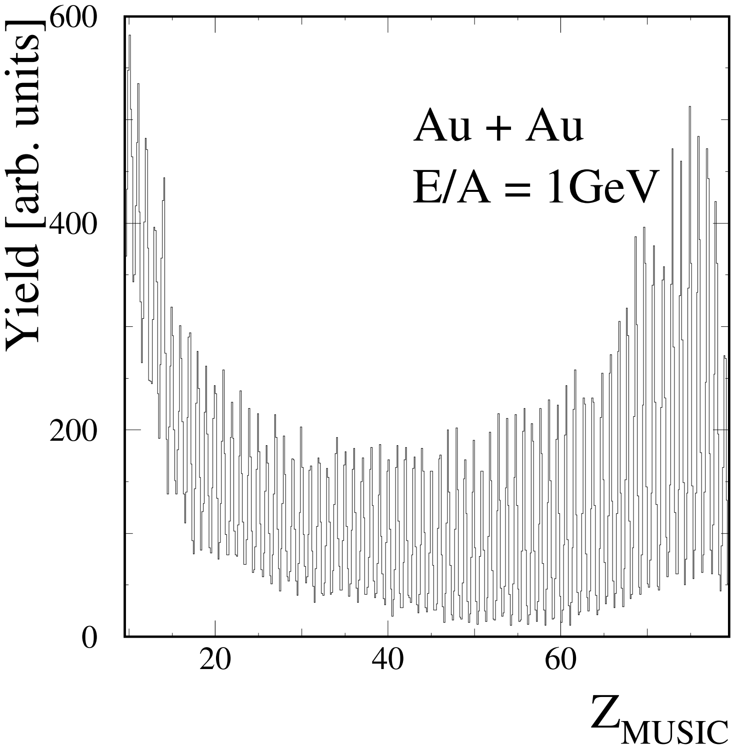

Abbildung 8: Ladungsspektrum des MUSIC-Detektors.

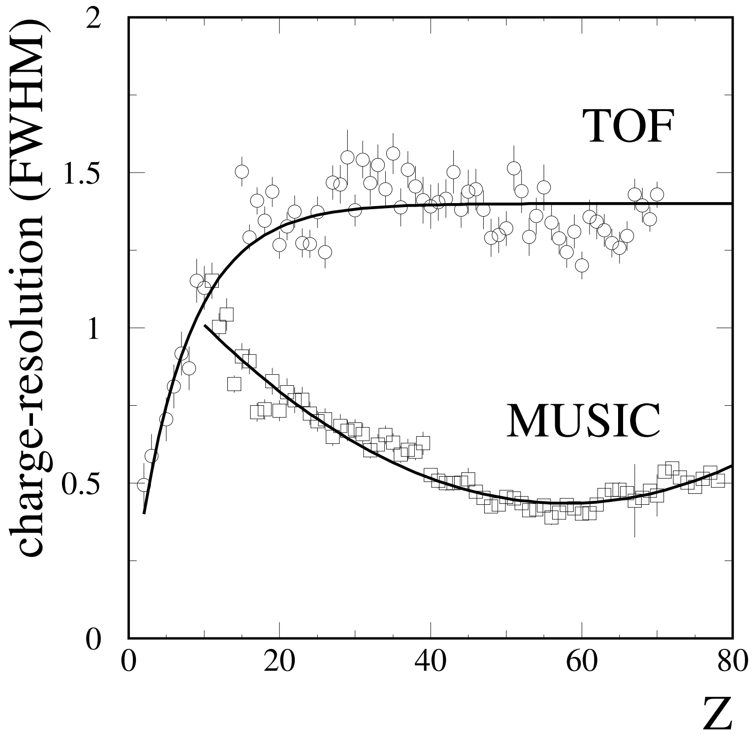

Abbildung 9: Ladungsauflösung ΔZ(FWHM) der Flugzeitwand und des MUSIC-Detektors für Fragmente aus der Reaktion Au+Au bei E/A=1GeV.

Die Auflösung hängt dabei nicht von dem verwendeten Projektil oder Target ab. Die bei den Strahlenergien von 800 und 600 AMeV erzielten Auflösungen sind für die MUSIC unverändert, die Auflösung der Flugzeitwand bei den kleineren Ladungen ist aufgrund des höheren Energieverlustes in den Szintillatoren sogar geringfügig besser.

Durch Kombination der verschiedenen Detektoren ist es so möglich für alle Fragmente mit $Z \geq 2$ die Ladung mit Einzelladungsauflösung (FWHM: $\Delta Z < 1$) zu bestimmen.

2.3 Definition der Projektilquelle und Akzeptanz

Die aus dem einfachen participant–spectator–Modell abgeleitete Annahme einer wohldefinierten, sich mit Strahlgeschwindigkeit bewegenden Projektilquelle läßt sich anhand des Flugzeitspektrums der Fragmente verifizieren. Unter Vernachlässigung der Flugwegunterschiede läßt sich dieses in ein Geschwindigkeitsspektrum transformieren. Die dadurch auftretenden Abweichungen sind kleiner als 1.5%. Die Flugzeitspektren für Fragmente der Ladung Z=2,3,4 und 9<Z<16 sind in Abbildung 10 exemplarisch für die Reaktion Au+Au bei E/A=1GeV gezeigt. Bis hinunter zu den leichtesten Fragmenten Z=2 weist die Flugzeitverteilung ein scharfes Maximum bei der der Strahlgeschwindigkeit entsprechenden Flugzeit auf. Dies bestätigt eindeutig die Existenz einer solchen Projektilquelle.

Allerdings haben die Verteilungen der leichten Fragmente $Z \leq 4$ Ausläufer zu größeren

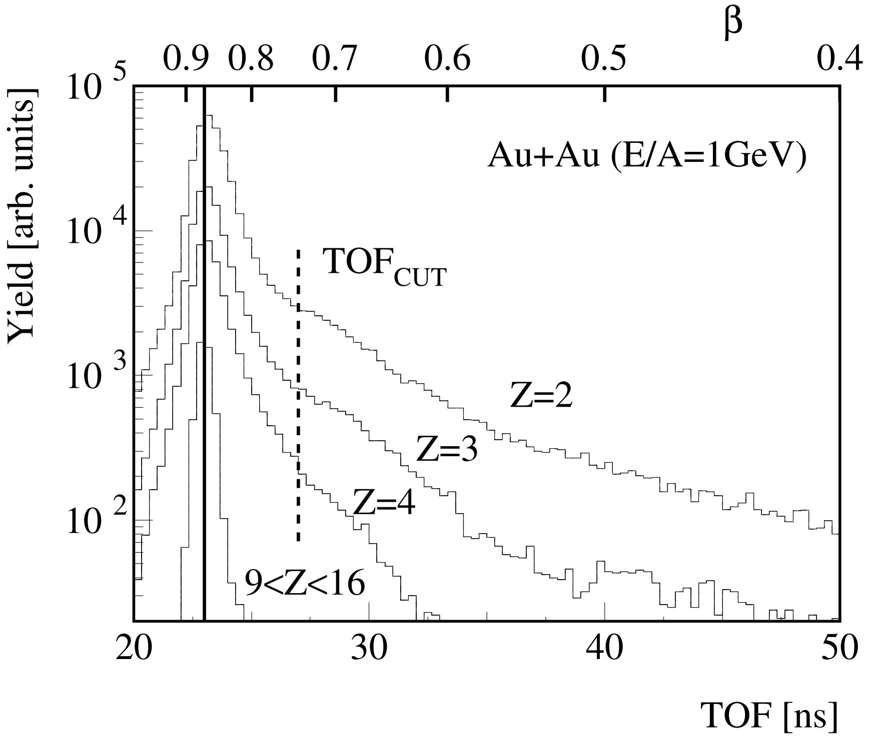

Abbildung 10: Flugzeitspektren der Fragmente mit Ladung Z=2,3,4 und 9<Z<16 aus der Reaktion Au+Au bei E/A=1GeV. Die obere Geschwindigkeitsskala entspricht der Annahme einer konstanten Flugstrecke von 6m. Die Strahlgeschwindigkeit ist mit der durchgezogenen Linie markiert, die gestrichelte Linie makiert die eingeführte Flugzeitschwelle.

Flugzeiten hin. Diese lassen sich durch eine Beimischung aus der intermediären Quelle erklären, was durch eine Analyse gezeigt werden konnte, bei der die sich durch die Akzeptanz des Detektors resultierende Flugzeitverteilung zweier sich mit Strahlrapidität und halber Strahlrapidität bewegender Quellen betrachtet wurde [Schü 95]. Zur Trennung beider Quellen wurde ein Flugzeitschwelle (TOF_{CUT}) eingeführt, die einer Flugzeit entsprechend 3/4 Strahlrapidität gewählt wurde. Zur Projektilquelle werden nur die Fragmente gezählt, deren Flugzeit unterhalb dieser Schwelle liegt. Diese Bedingung hat allerdings keine wesentliche Veränderung der später betrachteten Verteilungen zur Folge.

Einen großen Einfluß hingegen hat die sich mit Variation der Einschußenergie verändernde geometrische Akzeptanz des Spektrometers. Je geringer die Einschußenergie, desto weniger werden die Fragmente in den Akzeptanzbereich von $\pm 10°$ in der Ablenkebene des Magneten und $\pm 5°$ senkrecht dazu fokussiert.

Die geometrische Akzeptanz der Flugzeitwand für drei verschieden Bereiche der ereignischarakterisierenden Observable Z_{BOUND} (siehe Kap. 2.4) ist in Abbildung 11 in Abhängigkeit der Fragmentladung für die verwendeten Strahlenergien von 600,800 und 1000 AMeV für das Goldprojektil dargestellt. Die Akzeptanz wurde dabei dadurch bestimmt, daß an die Projektion der Ortsverteilung auf die vertikale (y-)Richtung, bzw. horizontale (x-)Richtung eine gaußförmige Verteilungsfunktion angepaßt wurde, und aus der bekannten Dimension des Detektors die Verluste in den Ausläufern berechnet wurden. Aufgrund des Größenverhältnisses von 2:1 für die Ausdehnung des Detektors in horizontaler zu vertikaler Richtung, dominieren die Verluste in vertikaler Richtung. Auch bei der niedrigsten Energie sind die Verluste in horizontaler Richtung vernachlässigbar.

Zur Untersuchung des kinematischen Fokussierungseffekts sind in Abbildung 12 die Verhältnisse der gemessenen, vertikalen Breiten σ_y bei 600, bzw. 800, AMeV zu den bei 1AGeV bestimmten Breiten als Funktion der Fragmentladung aufgetragen. Für zwei identische, sich aber mit unterschiedlichen Longitudinalimpuls bewegenden Quellen, ist das Verhältnis der Breiten der Ortsverteilung umgekehrt proportional dem Verhältnis der Longitudinalimpulse. Die Werte sind innerhalb der Fehler mit einem konstanten Wert, der dem Longitudinalimpulsverhältnis des Projektils entspricht, verträglich.

Der Verlauf bei der Energie von 1 GeV zeigt, daß hier die Fragmente der Projektilquelle vollständig in den Akzeptanzbereich der Flugzeitwand fallen. Selbst für die zentralsten Stöße (oberes Bild) liegt die Akzeptanz bei 95% für Li-Isotopen und immer noch über 90% für He-Isotope.

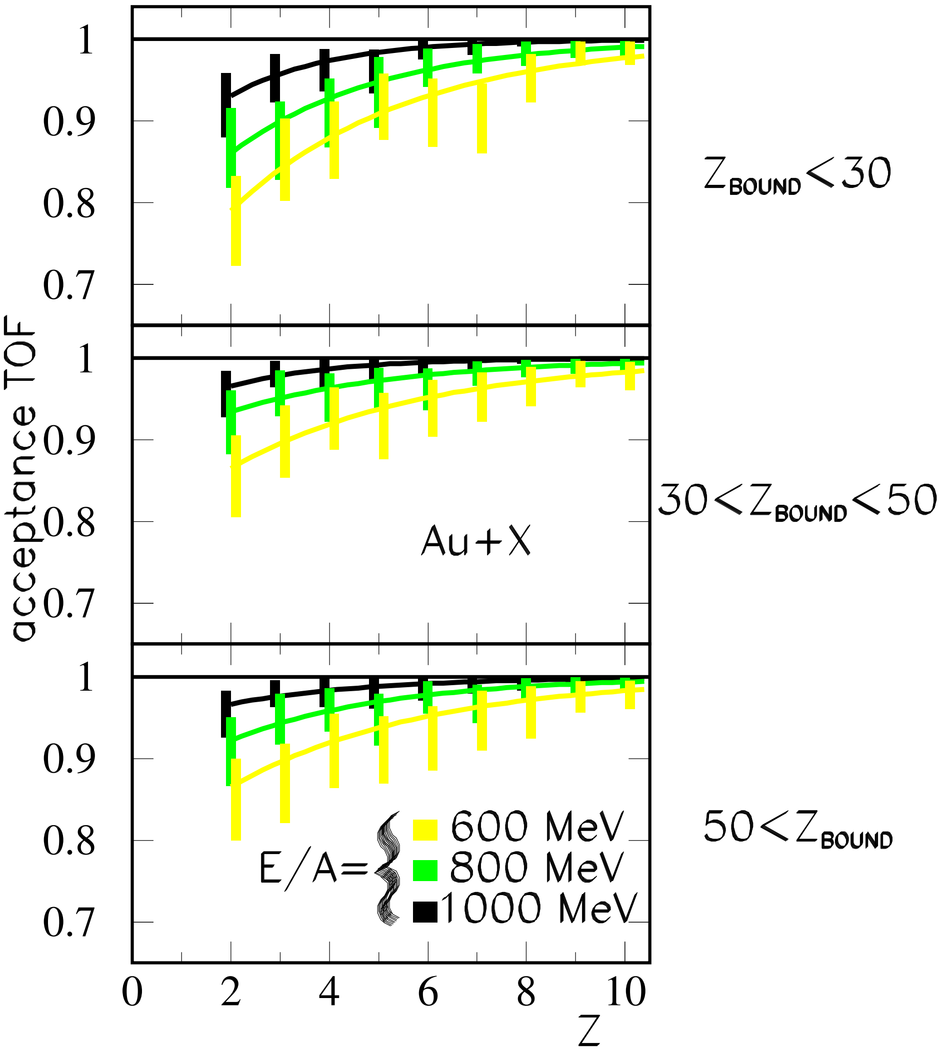

Abbildung 11: Die geometrische Akzeptanz der Flugzeitwand bei den im Experiment verwendeten Strahlenergien von 600,800 und 1000 AMeV für das Goldprojektil in Abhängigkeit der Fragmentladung Z. Sie wurde getrennt für drei verschiedene Bereiche in Z_{BOUND} bestimmt. Große Werte von Z_{BOUND} entsprechen dabei peripheren (unteres Bild), kleine Werte zentraleren Reaktionen (oberes Bild).

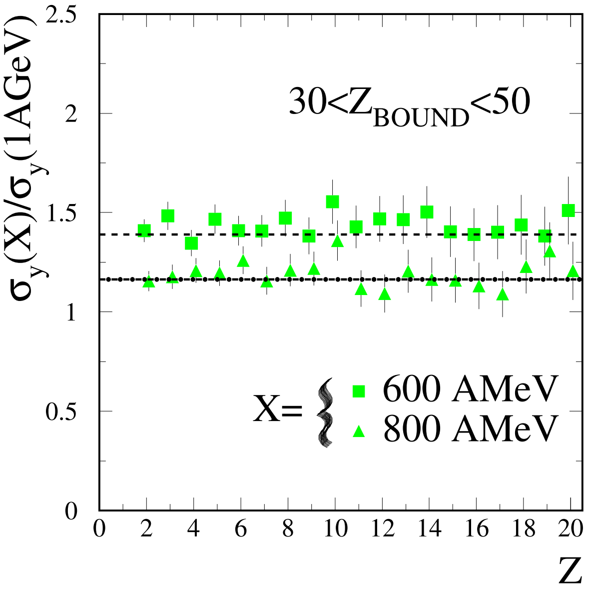

Abbildung 12: Verhältnis der Breiten σ_y der vertikalen Ortsverteilung auf der Flugzeitwand bei Strahlenergien von 600 und 800 AMeV zu den bei 1 AGeV gemessenen Breiten in Abhängigkeit der Fragmentladung Z. Die waagerechten Linien entsprechen den inversen Verhältnissen der Longitudinalimpulse des Strahls bei den entsprechenden Energien.

Der Öffnungswinkel des Magneten von $\pm 5°$ entspricht bei dieser Energie der doppelten Winkelbreite $\sigma_{\theta,y}$ für He-Isotope im mittleren Z_{BOUND} Intervall, in dem das Maximum der Produktion mittelschwerer Fragmente beobachtet wird. Für die niedrigeren Energien ist dieser Winkel entsprechend dem Longitudinalimpulsverhältnis zu skalieren. Deshalb müssen Teilchen, die innerhalb eines Winkels von $\pm 6°$ bei 800 AMeV, bzw. $\pm 7.2°$ bei 600 AMeV, im SiCsJ–Hodoskop nachgewiesen werden, der Projektilquelle zugeordnet werden. Dadurch läßt sich eine von der Einschußenergie unabhängige Akzeptanz erreichen.

2.4 Ereignis charakterisierende Observablen

Die experimentelle Bestimmung des Stoßparameters, und damit der Größe des geometrischen Überlapps von Projektil und Target, erfolgt mittels Observablen, die im Mittel eine monotone Abhängigkeit vom Stoßparameter zeigen. Beispiele hierfür sind die Gesamtmultiplizität geladener Teilchen N_c [Stoc 86], die Ladungssumme gebundener Ladung ($Z \geq 2$) Z_{BOUND} [Hube 91] oder ihr Komplement N_1, die Anzahl der wasserstoffähnlichen Isotope, die Ladungssumme Z_y der Teilchen bei mittlerer Rapidität [Ogil 89], oder die transversale Energie E_{trans} [Ritt 88]. Je nach den experimentellen Bedingungen und untersuchten Reaktionen eignen sich die verschiedenen Größen unterschiedlich gut zur Klassifizierung der Heftigkeit des Stoßes.

In unserem Fall erwartet man aus dem *participant–spectator*–Modell, daß mit zunehmender Zentralität des Stoßes die Größe des Projektilrestes monoton abnimmt, seine Anregung, sowie die Größe der intermediären Quelle, monoton zunehmen.

Die aus der intermediären Quelle emittierten Teilchen werden im Experiment im Si-CsJ-Hodoskop nachgewiesen. Die Multiplizität der im Hodoskop nachgewiesenen Teilchen N_{HODO} kann deshalb zur Klassifizierung herangezogen werden. Allerdings ändert sich

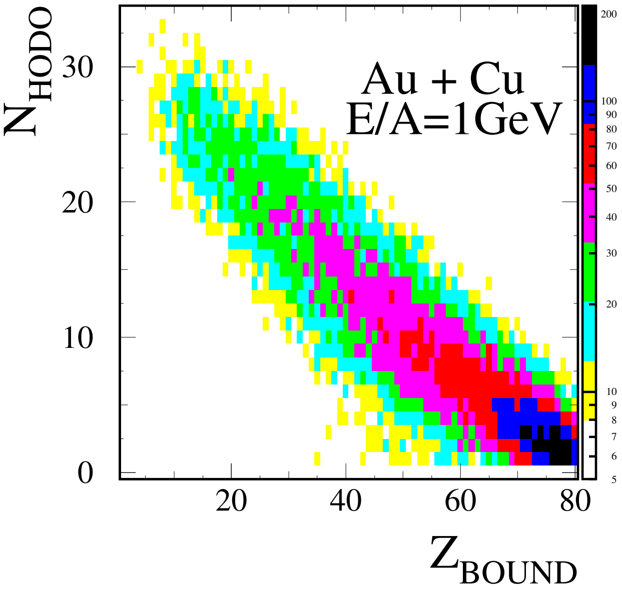

Abbildung 13: Korrelation der ein Ereignis charakterisierenden Observablen Z_{bound} und N_{HODO} für die Reaktion Au+Cu bei E/A = 1GeV.

mit der Einschußenergie auch die geometrische Akzeptanz des Hodoskops bezüglich der intermediären Quelle.

Für die Projektilquelle hingegen läßt sich eine von der Einschußenergie unabhängige Akzeptanz erreichen. Verteilungen aus der Projektilquelle definierter Observablen sind somit unabhängig von der Einschußenergie und lassen sich direkt miteinander vergleichen. Zur Ereignisklassifizierung eignen sich hier die Observablen Z_{max}, die Ladung des größten Fragmentes eines Ereignisses, und

$$Z_{BOUND} = \sum_{Z_i \geq 2} Z_i \tag{1}$$

die nachgewiesene, gebundene Gesamtladung des Projektilrests. Die Anzahl der geladenen Teilchen des Projektilrests N_C^P eignet sich nicht, da das gegenläufige Verhalten bei Verkleinerung der Quellgröße ($N_C^P \downarrow$) und Erhöhung der Anregung ($N_C^P \uparrow$) zu einer nicht-monotonen Abhängigkeit vom Stoßparameter führen kann.

Zur Ereignischarakterisierung wurde im Folgenden Z_{BOUND} verwendet, da in der Interpretation als Phasenübergang das schwerste Fragment als Repräsentant des verbleibenden "Kern–Flüssigkeitstropfen" zur Bestimmung des kritischen Exponenten β benutzt wird. Daß sich die Größe Z_{BOUND} in der Tat zur Klassifizierung der Ereignisse eignet, wird in Kapitel 3.3 gezeigt werden.

Im Experiment wurden durch die Triggerbedingung nur solche Ereignisse aufgenommen, bei denen mindestens ein Teilchen im Hodoskop nachgewiesen wurde. Die Korellation der beiden Größen Z_{BOUND} und N_{HODO} ist in Abbildung 13 gezeigt. Desweiteren durfte kein strahlähnliches Teilchen im ZDF nachgewiesen werden, die Schwelle hierbei lag für Gold als Projektil bei $Z \approx 65$. Beide Kriterien zur Triggerentscheidung beeinflussen die Verteilung nur im Bereich großer Z_{BOUND}–Werte, die Verteilungen im Bereich $Z_{BOUND} \leq 60$ werden dadurch nicht beeinflußt.

3 Fragmentation der Projektilquelle

3.1 Universalität

Die in einem früheren Experiment beim Projektilaufbruch von Gold bei E/A=600MeV gemachte Beobachtung [Hube 92a][Kreu 92], daß die gegen Z_{BOUND} aufgetragenen Ladungskorrelationen unabhängig vom verwendeten Target sind, bestätigte sich bei allen untersuchten Projektil–Einschußenergie–Kombinationen [Schü 95]. In dem früheren Experiment konnte aus einer Analyse der Impulskorrelationen der Fragmente gezeigt werden [Lind 93], daß diese Targetunabhängigkeit, abgesehen von der Coulomb–Wechselwirkung zwischen Projektil und Target, auch für diese dynamischen Observablen gilt.

Als Beispiel dieser Target–Universalität ist in Abbildung 14 der Mittelwert der Anzahl mittelschwerer Fragmente (Intermediate Mass Fragments) M_{IMF} in Abhängigkeit von Z_{BOUND} für Reaktionen mit Gold als Projektil bei einer Einschußenergie von E/A=1GeV gezeigt. Als IMF werden hier alle Fragmente angesehen, deren Ladung größer als 2 und kleiner als ein Drittel der Projektilladung ist. Dies grenzt sie nach oben gegen Spaltfragmente und schwere Restkerne und nach unten gegen Evaporationsprodukte,wie H– und He–Isotope, ab. Im Bereich mittlerer Z_{BOUND}–Werte beobachtet man den Aufbruch des Projektilrestkerns in eine große Zahl mittelschwerer Fragmente, die Multifragmentation. Die ebenfalls gezeigten Verteilungen der Mittelwerte der Ladung des schwersten Fragments Z_{max} und des zweiten Moments der experimentellen Fragmentgrößenverteilung M_2^{exp} spielen später beim Versuch der Bestimmung kritischer Exponenten eine Rolle.

Das k-te Moment der Fragmentgrößenverteilung ist dabei definiert als :

$$M_k^{exp} = \sum_{Z_i \geq 2} Z_i^k \tag{2}$$

Das schwerste Fragment ist hierbei von der Summe ausgenommen, der Zusatz *exp* deutet an, daß die im Experiment nicht gemessenen Fragmente mit Z=1 in der Summe nicht enthalten sind.

Die bei verschiedenen Targets gemessenen Verteilungen dieser "globalen" Observablen sind innerhalb ihrer systematischen Fehler identisch. Diese Universalität gilt auch für selektivere Observablen, wie die Mittelwerte der Häufigkeit N_Z, mit der ein Fragment der Ladung Z pro Ereignis auftritt. Als Beispiel sind in Abbildung 15 die Verteilungen für Helium-,Lithium- und Berylium–Isotope gezeigt.

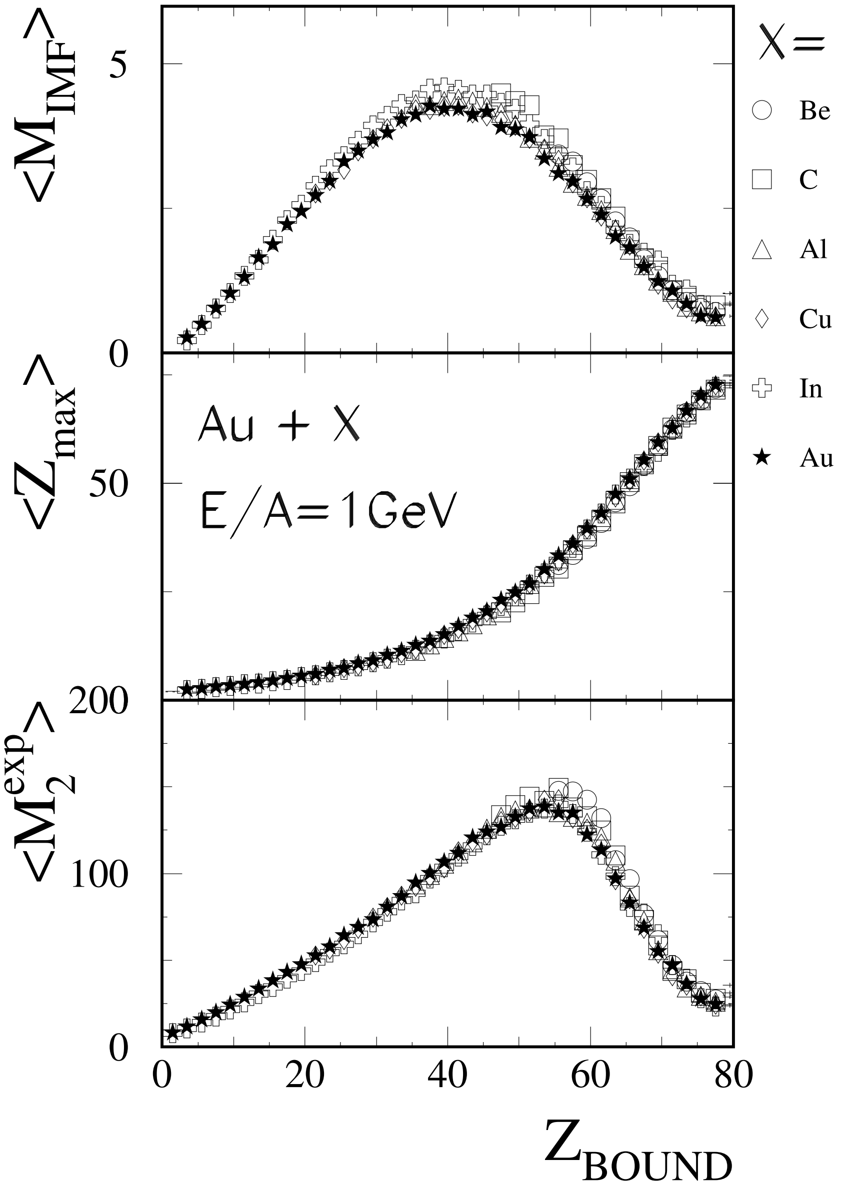

Abbildung 14: Mittelwerte der Anzahl mittelschwerer Teilchen M_{IMF}, des Ladung des schwersten Fragments Z_{max} und des 2. Moments der Ladungsverteilung M_2^{exp} als Funktion von Z_{BOUND} für die Reaktion von Au bei E/A=1GeV mit verschiedenen Targets (Be,C,Al,Cu,In,Au).

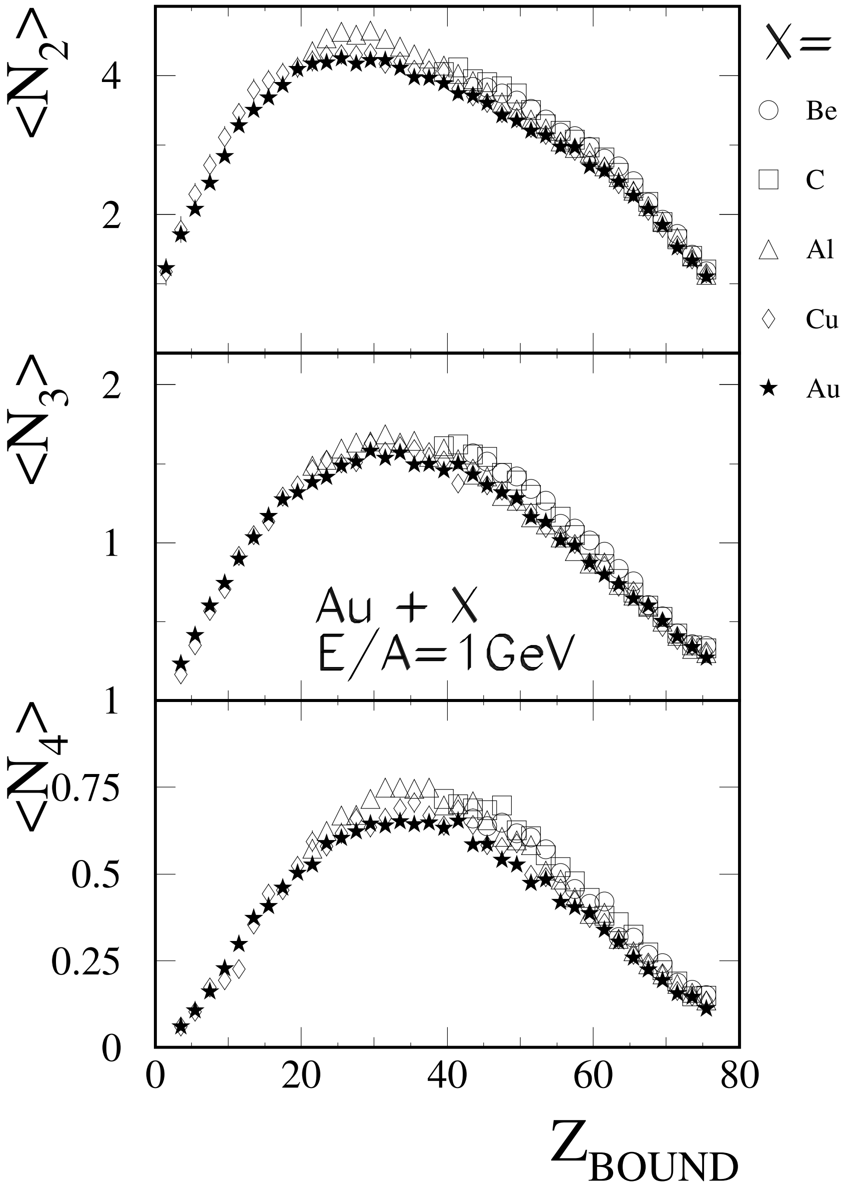

Abbildung 15: Mittelwert der Anzahl N_Z der Teilchen mit Ladung Z pro Wechselwirkung als Funktion von Z_{BOUND} für Reaktionen von Au bei E/A=1GeV mit verschiedenen Targets.

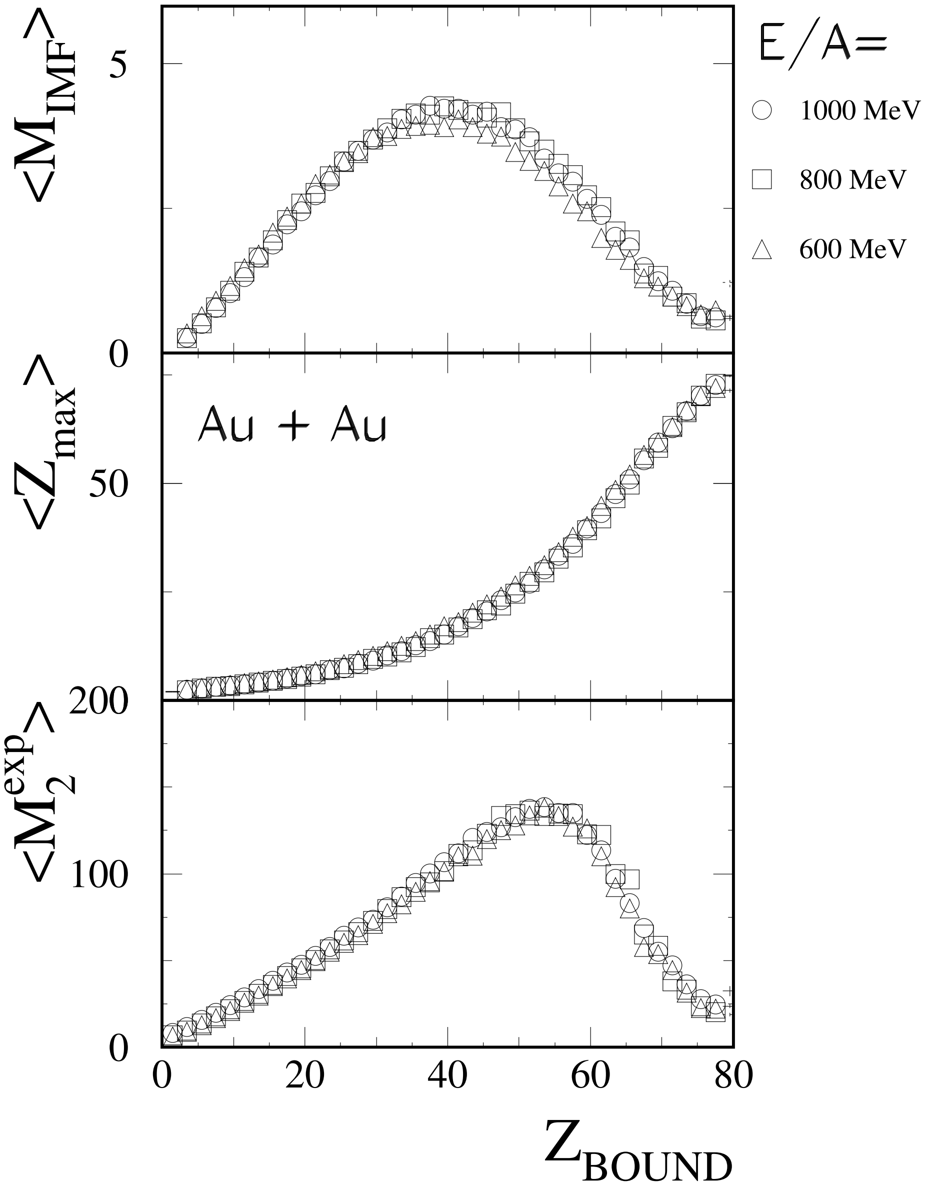

Abbildung 16: Mittelwerte der Anzahl mittelschwerer Teilchen M_{IMF}, des Ladung des schwersten Fragments Z_{max} und des 2. Moments der Ladungsverteilung M_2^{exp} als Funktion von Z_{BOUND} für die symmetrische Reaktion Au+Au bei Einschußenergien von E/A=600,800 und 1000 MeV.

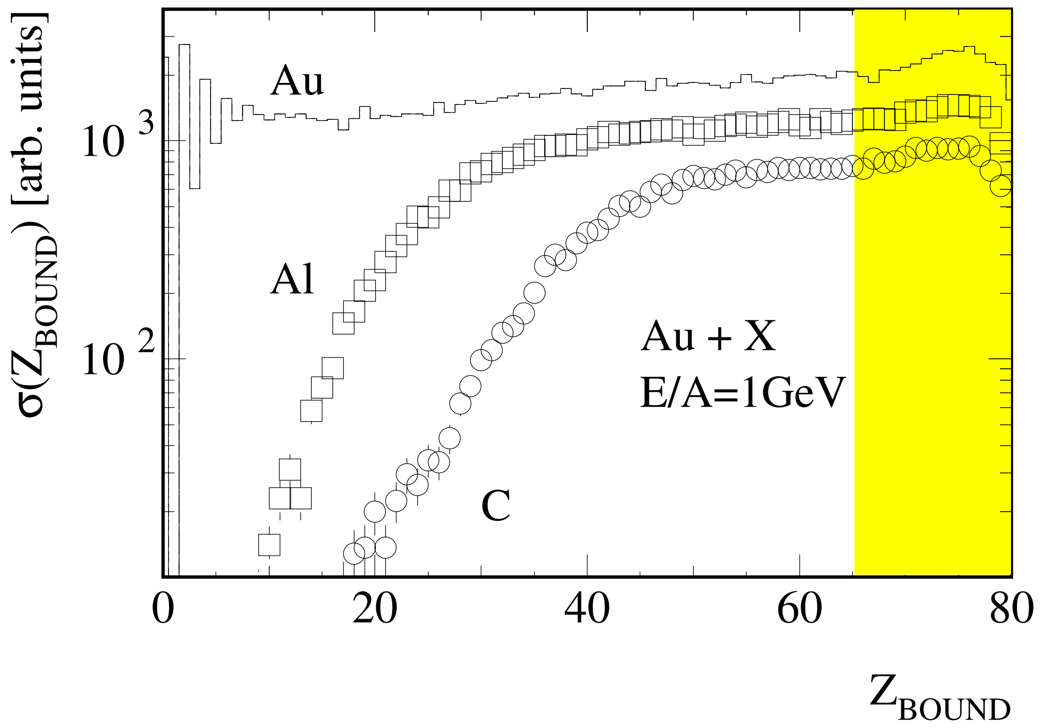

Abbildung 17: Wirkungsquerschnittverteilung für die Reaktionen von Au auf C,Al und Au bei E/A=1GeV. Die grau markierte Fläche stellt den Bereich dar, in dem der Trigger die gemessenen Verteilungen beeinflußt.

Neben dieser Target–Universalität findet man auch eine (Einschuß-) Energie–Universalität. Die Verteilungen für das symmetrische System Au+Au bei den untersuchten Energien E/A=600,800 und 1000 MeV sind in Abbildung 16 gezeigt. Auch hier lassen sich innerhalb der systematischen Unsicherheiten keine Unterschiede in den Verteilungen feststellen.

Die Verteilung des Wirkungsquerschnittes ist für die Reaktionen von Au auf C,Al und Au bei einer Einschußenergie von E/A=1GeV in Abbildung 17 gezeigt. Während für das Goldtarget der gesamte Bereich in Z_{BOUND} übertrichen wird, brechen die Verteilungen für die leichteren Targets unterhalb eines Schwellenwertes in Z_{BOUND} drastisch ab. Definiert man diesen Schwellenwert als den Wert, bei dem der aufintegrierte Wirkungsquerschnitt 2% des Gesamtwirkungsquerschnittes ausmacht [Kunz 95], so liegt er bei der Einschußenergie von E/A=1GeV bei Z_{BOUND}=40 für das Kohlenstofftarget, bzw. 25 für das Aluminiumtarget. Die zuvor beschriebene Universalität gilt nur im Z_{BOUND}-Bereich oberhalb dieses Schwellenwertes. In den Ausläufern der Verteilung unterhalb treten Abweichungen auf. Die Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnittverteilung und damit des Schwellenwertes, unterhalb dessen Abweichungen von der Universalität auftreten, ist ausführlich in der Doktorarbeit von W.D. Kunze diskutiert [Kunz 95].

3.2 Trennung Multifragmentation – Spaltung

Die Tatsache, daß Kerne geladen und von endlicher Größe sind, führt zu einem Ausgangskanal der Reaktion, der in "normalen" Flüßig–Gas–Systemen unbekannt ist, der Spaltung. In Abbildung 18 ist die Korrelation der Ladungen des schwersten und zweitschwersten Fragments für Reaktionen des Gold- und Uran–Projektils mit Gold als Target gezeigt. Für Uran erkennt man neben dem Band bei $Z_2/Z_{Proj} \leq 0.1$ eine deutliche Anhäufung

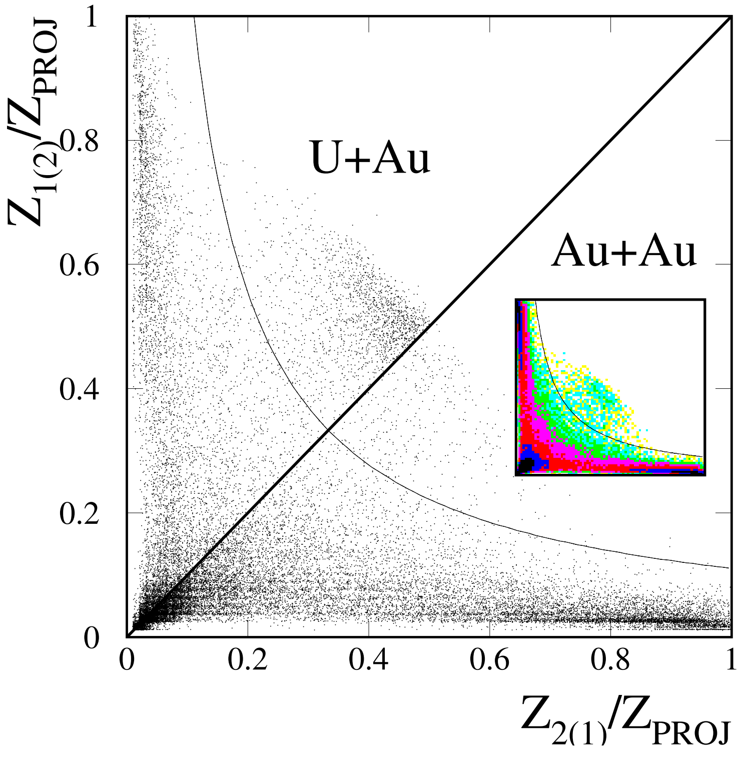

Abbildung 18: Korrelation der auf die Strahlladung normierten Ladung der zwei größten Fragmente für die Systeme Au+Au und U+Au bei einer Energie E/A=1GeV. Die hyperbolische Linie zeigt die eingeführte Schwelle im Produkt der zwei größten Ladungen. Alle Ereignisse oberhalb dieser Linie werden als Spaltereignisse angesehen.

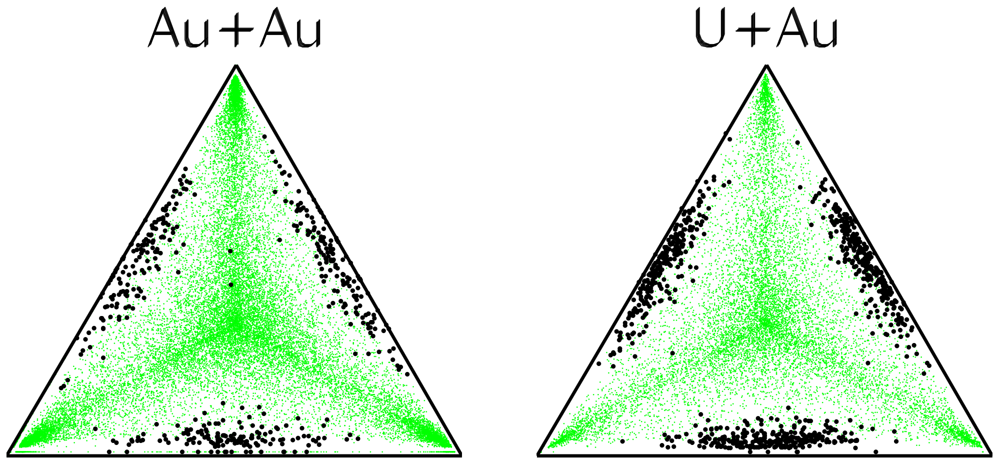

Abbildung 19: Ladungskorrelation der drei schwersten Fragmente in Form eines Dalitz–Diagrammen (siehe Text) für die Reaktionen Au und U auf Au bei E/A=1GeV. Die grauen Punkte zeigen die Korrelation für die Ereignisse, die die Bedingung (3) erfüllen, die größeren, schwarzen Punkte die Korrelation der Ereignisse, die als Spaltereignisse angesehen werden.

von Ereignissen mit $Z_1/Z_{Proj}, Z_2/Z_{Proj} \approx 0.5$, dies sind die Spaltereignisse. Beide Bereiche sind durch einen Bereich geringer Häufigkeit deutlich voneinander getrennt. Beim Gold–Projektil wird die Anhäufung im Spaltbereich erst bei logarithmischer Auftragung der Häufigkeit (kleines Bild) deutlich.

Zur Trennung der (Multi–)Fragmentationsereignisse von den Spaltereignissen wurde eine Schwelle im Produkt der beiden größten Fragmentladungen eingeführt [Jaqa 91] :

$$\frac{Z_1}{Z_{Proj}} \cdot \frac{Z_2}{Z_{Proj}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \tag{3}$$

Die Bedingung (3) ist in Abbildung 18 als Hyperbel eingezeichnet; Ereignisse oberhalb dieser Linie werden als Spaltereignisse angesehen.

Die Korrelation zwischen den Ladungen der drei schwersten Fragmente ist für beide Ereignisklassen als Dalitz–Diagramm [Kreu 92] in Abbildung 19 gezeigt. In dieser Darstellung ist der Abstand eines Punktes von den Seiten des gleichseitigen Dreiecks durch $Z_i/(Z_1 + Z_2 + Z_3)$ gegeben. Spallationsereignisse liegen in diesem Diagramm in einem Scheitelpunkt des Dreiecks; symmetrische Spaltung ist in der Nähe des Mittelpunkts einer Seite zu finden. Den Multi–Fragment–Ereignisse, bei denen die drei größten Fragmente in etwa die gleiche Ladung haben, ist der Schwerpunkt des Dreieckes zugeordnet. Man erkennt, daß die Multifragment–Ereignisse sich nicht aus der Spaltungsgruppe, die als schwarze Punkte dargestellt ist, entwickeln, sondern sich als eine Fortsetzung von symmetrischer werdenden Spallationsereignissen entwickeln.

Für die bei großen Z_{BOUND}–Werten beobachteten Spallationsereignisse erhält man, da der schwere Restkern aus der Summe ausgeschlossen ist, kleine Werte für das zweite Moment der Fragmentgrößenverteilung, während für Spaltereignisse das zweitgrößte Fragment noch immer eine Ladung $Z_2 \approx Z_{Proj}/2$ hat, was zu einem großem zweiten Moment führt. Während die Verteilung von M_2^{exp} der Fragmentationsereignisse für Z_{BOUND} gegen Z_{Proj} wieder abfällt, bevölkern die Spaltereignisse den Bereich großer Werte in Z_{BOUND} und M_2^{exp} (Abbildung 20). Der relative Anteil von Spaltereignissen nimmt dabei von Gold nach Uran drastisch zu; während zum Beispiel im Intervall $0.9 \leq Z_{BOUND}/Z_{PROJ} \leq 0.95$

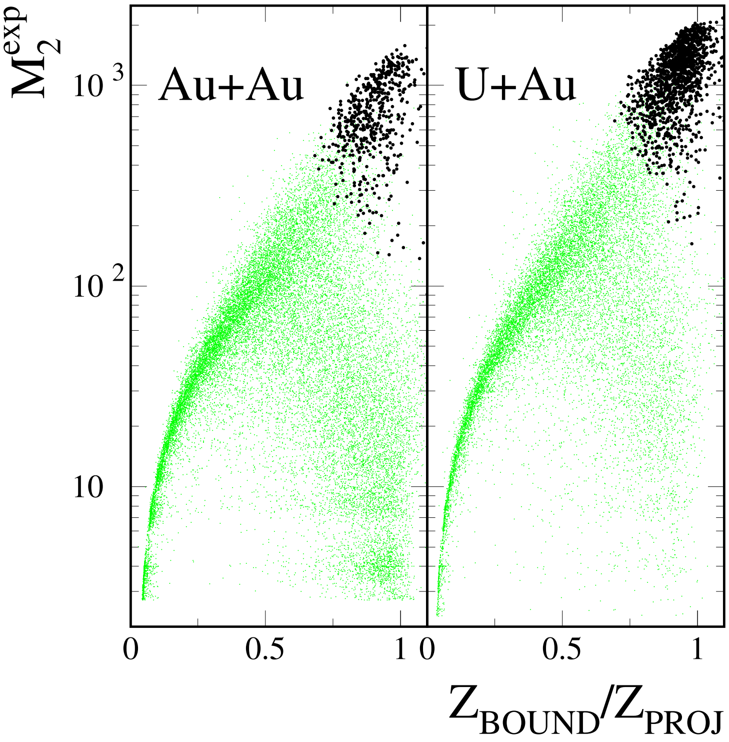

Abbildung 20: Verteilung des 2. Moments der Ladungsverteilung für Multifragmentationsereignisse (graue Punkte) und Spaltereignisse (größere, schwarze Punkte) für die Reaktionen Au und U auf Au bei E/A=1GeV.

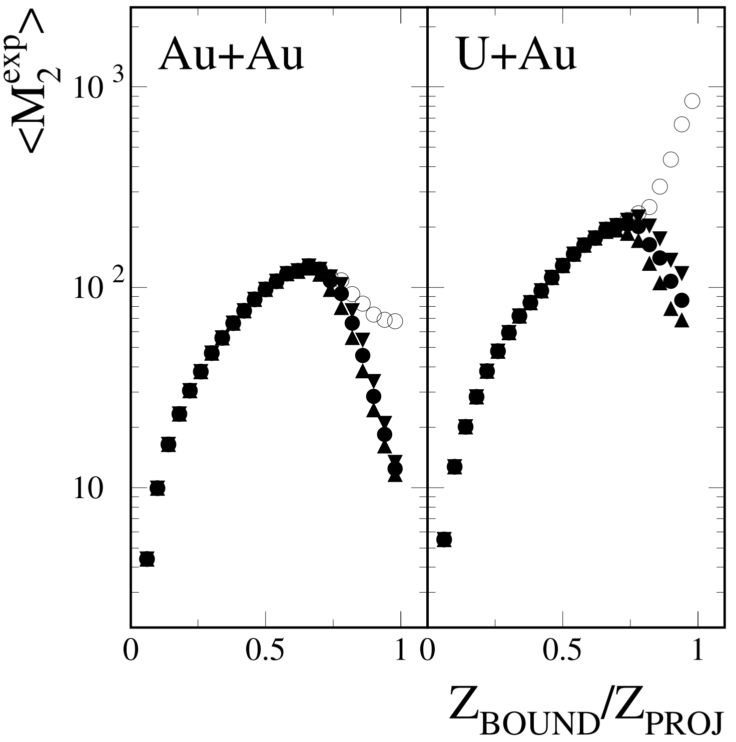

Abbildung 21: Mittelwert des gemessenen 2. Moments der Ladungsverteilung in Abhängigkeit von Z_{BOUND}. Die offenen Kreise zeigen den Verlauf ohne Abtrennung der Spaltereignisse, die geschloßenen den Verlauf, bei denen Spaltereignisse durch die Bedingung $Z_1 \cdot Z_2 \leq (Z_{PROJ}/3)^2$ abgetrennt wurden. Bei den Dreiecken wurde der Wert auf der rechten Seite der Ungleichung um 20% variiert, um den Einfluß der genauen Lage des Spaltcuts zu untersuchen.

der Anteil der Spaltereignisse 6% bei Gold ausmacht, beträgt er bei Uran mit 60% das Zehnfache.

Aufgrund der starken Gewichtung schwerer Fragmente durch die in der Summe auftretende k–te Potenzbildung der Ladung bei Berechnung des k–ten Moments, führen auch kleine Beimischungen von Spaltereignissen zu einer deutlichen Veränderung des beobachteten Mittelwerts der Verteilung der höheren Momente [Jaqa 91]. Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 21 der Mittelwert des zweiten Moments in Abhängigkeit von Z_{BOUND} aufgetragen. Die offenen Kreise zeigen die Verteilungen bei der Spaltereignisse mit berücksichtigt wurden, die schwarzen Kreise die Verteilung bei der die Spaltereignisse durch die Bedingung (3) ausgeschlossen wurden. Selbst die geringe Beimischung von Spaltereignissen im Falle des Goldprojektils führt zu einer deutlichen Veränderung der Verteilung, im Falle des Uranprojektils fällt das 2.Moment nicht wie erwartet zu großen Z_{BOUND}-Werten wieder ab, sondern steigt über den gesamten Z_{BOUND}-Bereich monoton an. Zur Untersuchung des Einflusses des Schwellenwertes von $(\frac{1}{3})^2$ in Gleichung (3) wurde dieser um ±20% variiert, was die durch Dreiecke dargestellte Verteilungen ergibt. Diese Variation um ±20% wird in den späteren Analysen zur Abschätzung des systematischen Fehlers durch die Unsicherheit in der Trennung von Spaltereignissen verwendet. Während sich für das Goldprojektils nur eine geringe Veränderung der Verteilung ergibt, ist der Einfluß bei Uran als Projektil deutlich erkennbar. Aufgrund der besseren Statistik der Spallationsereignisse und der geringeren Unsicherheiten durch die Bedingung zur Abtrennung der Spaltung basieren die späteren Analysen hauptsächlich auf der untersuchten Fragmentation des Goldprojektils.

3.3 Größe und Anregungsenergie des Prefragments

Bei Messung aller Fragmente kann die Größe (Z_0,A_0) und Anregungsenergie (E_0^*) des Prefragments aus den drei Erhaltungssätzen für Ladung, Baryonenzahl und Energie bestimmt werden [Camp 94, Zude 95] :

$$\langle \mathbf{Z_0} \rangle = Z_{BOUND} + (N_p + N_d + N_t) \tag{4}$$

$$\langle \mathbf{A_0} \rangle = A_{BOUND} + (N_p + 2 \cdot N_d + 3 \cdot N_t) + N_n \tag{5}$$

$$\langle \mathbf{E_0^*} \rangle = \left(\sum_i m_i + \sum_i K_i \right) - m_0 - K_0 \tag{6}$$

Z_i,A_i,m_i und K_i bezeichnen hierbei die Ladungszahl, Massenzahl,Masse und kinetische Energie des Fragments i.

Alle Teilchen mit Ladung $Z \geq 2$ werden im Experiment mit nahezu 100% Akzeptanz vom ALADIN–Spektrometer, die von der Projektilquelle emittierten Neutronen im LAND-Detektor mit einer Akzeptanz von 50–70%, abhängig vom Stoßparamter, nachgewiesen. Die einzigen Unbekannten auf den rechten Seiten der Gleichungen sind somit die Häufigkeiten der H–Isotope N_p,N_d und N_t. Gibt man das Verhältnis von p:d:t vor, so reduziert sich die die Anzahl der Unbekannten auf die Häufigkeit von Teilchen mit Ladung Z=1. Durch weitere Annahme eines N/Z–Verhältnisses für das Prefragment läßt sich dann das Gleichungssystem eindeutig lösen.

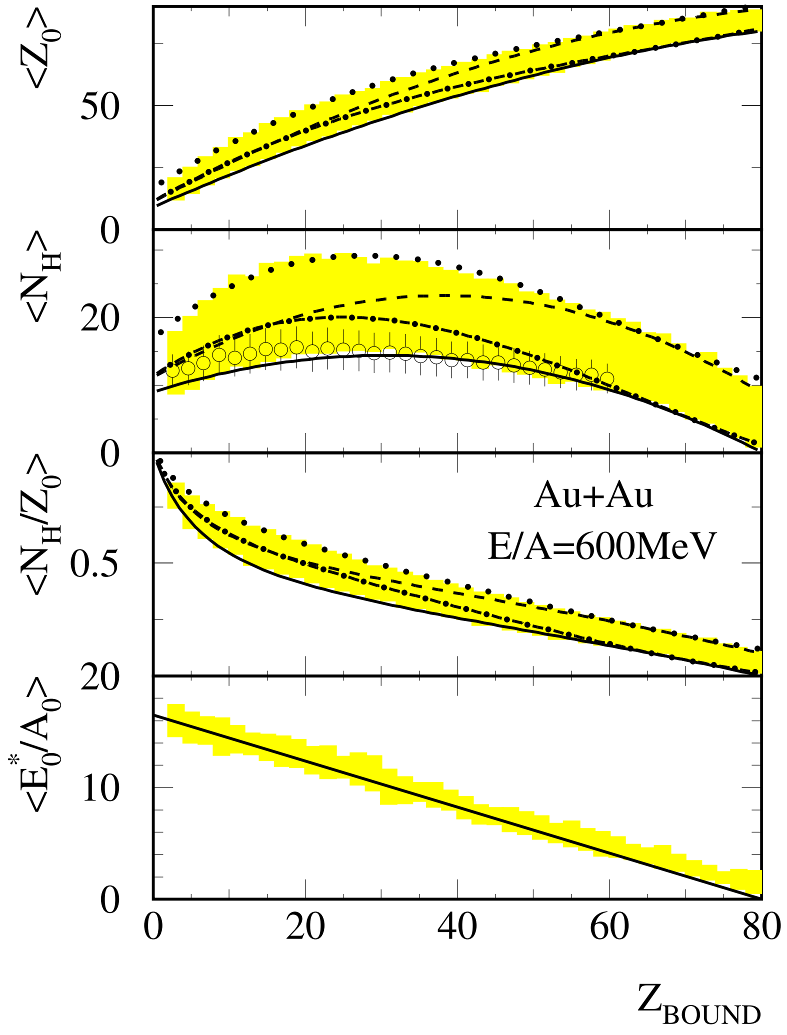

Abbildung 22: Rekonstruierte Mittelwerte der Größe Z_0, der Anzahl von H–Isotopen N_H, des Verhältnisses der Anzahl der H–Isotope zur Systemgröße N_H/Z_0 und der Anregungsenergie pro Nukleon E^*/A des (Projektil–)Prefragments in Abhängigkeit von Z_{BOUND} für die Reaktion Au+Au bei E/A=600MeV. Die eingezeichneten Linien entsprechen den verschiedenen angenommenen Werten für das N/Z-Verhältnis und das p:d:t-Verhältnis :
N/Z=1.5; p:d:t= 1:0.3:0.1 (durchgezogen), 1:0.6:0.4 (Strich-Punkt)
N/Z=1.3; p:d:t= 1:0.3:0.1 (Striche), 1:0.6:0.4 (Punkte)
Die als Kreise eingezeichneten,gemessenen Protonenzahlen sind auf die Effizienz von ca. 50% korrigiert. Bei der Anregungsenergie entsprechen die grauen Flächen ebenfalls den Extremwerten der verwendeten Parametrisierungen.

Diese Analyse lag bei Fertigstellung dieser Arbeit nur für das System Au+Au bei einer Einschußenergie von E/A=600MeV vor [Zude 95]. Die systematischen Fehler aufgrund der fehlenden Information wurden durch Variation des p:d:t–Verhältnisses zwischen 1 : 0.3 : 0.1 und 1 : 0.6 : 0.4 abgeschätzt, die representative Werte für periphere und zentrale Kollisionen darstellen [Doss 88]. Das N/Z–Verhältnis wurde zwischen $N_0/Z_0(Au) = 1.5$ und $N_0/Z_0 = 1.3$ variiert. Zur Berechnung der mittleren Massenzahlen der He- und Li-Isotope wurden die gemessenen Isotopenverhältnisse [Möhl 95] verwendet. Die Massenzahlen A_i der schwereren Fragmente wurden von der gemessenen Ladung mittels der halb–empirischen EPAX–Parametrisierung [Sümm 90] abgeleitet. Die Parametrisierung war dabei an Daten eines früheren Experiments, in dem der Aufbruch von Au+Pb bei E/A=600MeV untersucht wurde [Lind 93], angepaßt. Die mittleren kinetischen Energien K_i der einzelnen Fragmentladungen wurden aus der transversalen Breite der Impulsverteilung abgeleitet. Diese Vorgehensweise nimmt einen isotropen Zerfall an und vernachlässigt den Beitrag durch eine gerichtete, transversale Bewegung des Projektil–Prefragments. Letzteres wurde auf der Grundlage der im früheren Experiment bestimmten transversalen Schwerpunktsbewegung des zerfallenden Systems in der Reaktion Au+Pb bei E/A=600MeV [Lind 93] korrigiert (K_0 in Gleichung (6)).
Als Ergebnis dieser Analyse [Zude 95] sind in Abbildung 22 die Mittelwerte der Ladung des Prefragments Z_0, der Häufigkeit von H–Isotopen N_H, des Anteils der H–Isotope an der Gesamtladung N_H/Z_0 und der Anregungsenergie pro Nukleon E_0^*/A_0 in Abhängigkeit von Z_{BOUND} gezeigt. Wie für eine zunehmende Anregungsenergie erwartet, steigt N_H/Z_0 mit fallendem Z_{BOUND} monoton an. Die Fehlerbalken spiegeln die zuvor angesprochenen systematischen Unsicherheiten wieder. Die eingezeichneten Linien geben den Verlauf der verschiedenen Parametereinstellung wieder. Die H-Isotope können in der Flugzeitwand nur mit einer Effizienz von ca. 50% nachgewiesen werden, dieser Wert ergibt sich aus der Stetigkeitsbedingung der von den Hodoskopen und der Flugzeitwand gemessenen Winkelverteilung [Schü 95]. Die auf diese Effizienz korrigierten, gemessenen Werte für die Anzahl von H-Isotopen sind als Kreise eingezeichnet. Sie wird am besten durch die Parametriesierung mit dem N/Z-Verhältnis von Au und dem peripheren p:d:t-Verhältnis beschrieben. Deshalb wird im Folgenden bei den angewandten Analysen, in die die Systemgröße eingeht, die Ergebnisse dieser Parametrisierung gewählt. Zur Abschätzung der systematischen Unsicherheiten dient ein Vergleich zu der Parametrisierung mit dem zentralen p:d:t-Verhältnis.

In Übereinstimmung mit [Camp 94] zeigt die Anregungsenergie pro Nukleon eine nahezu lineare Abhängigkeit von Z_{BOUND}. Systemgröße und Anregungsenergie pro Nukleon lassen sich folgendermaßen parametrisieren :

$$\begin{aligned} \langle Z_0 \rangle &= 4.7 + 1.45 \cdot Z_{BOUND} - 0.0066 \cdot Z_{BOUND}^2 && (7) \\ \langle E_0^* / A_0 \rangle &= 0.206 \cdot (Z_{PROJ} - Z_{BOUND}) && (8) \end{aligned}$$

Aufgrund der zuvor beschriebenen Universalität erwartet man, daß diese Parametrisierung auch für andere Targets und Einschußenergien ihre Gültigkeit hat.

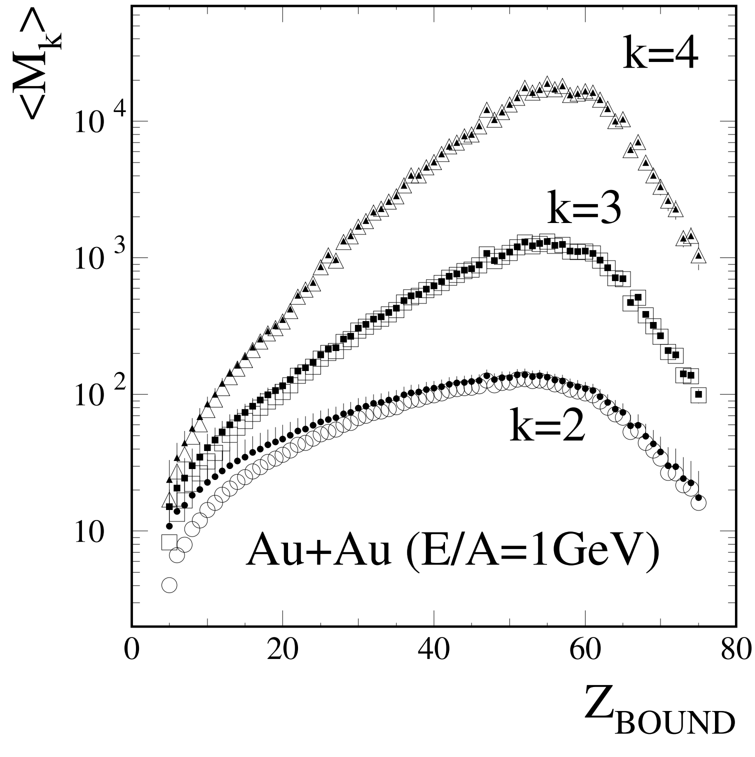

Abbildung 23: Korrektur der höheren Momente der Ladungsverteilung auf die rekonstruierte Anzahl der H–Isotope. Die offenen Symbole zeigen den Verlauf der gemessenen Momente M_k^{exp}, bei denen die Teilchen mit Ladung Z=1 nicht enthalten sind, die geschlossenen Symbole den auf die rekonstruierte Anzahl von H–Isotopen korrigierten Verlauf.

3.4 Korrektur der Momente auf die Protonenzahl

Mit Hilfe der im vorigen Kapitel beschriebenen Rekonstruktion der Systemgröße lassen sich auch die gemessenen Momente der Fragmentladungsverteilung auf die im Experiment nicht zugänglichen Fragmente mit Z=1 korrigieren.
In Abbildung 23 sind das zweite, dritte und vierte Moment in Abhängigkeit von Z_{BOUND} aufgetragen. Die offenen Symbole zeigen die gemessene Verteilung M_k^{exp}, bei der die Teilchen mit Z=1 nicht enthalten sind. Die geschlossenen Symbole zeigen die auf die H–Isotopenzahl korrigierten Verteilungen M_k. Die Fehlerbalken spiegeln die systematische Unsicherheit in der Systemgrößenbestimmung wieder. Das "Gewicht" eines He–Isotopes beträgt z.B. bei der Berechnung des 2.Moment das vierfache, bei Berechnung des 4.Moments bereits das sechzehnfache dessen eines H–Isotopes. Deshalb spielen die H–Isotope für die höheren Momente eine immer geringere Rolle. Selbst für das zweite Moment wird der Verlauf im wesentlichen durch die gemessenen, schwereren Fragmente bestimmt, auch wenn die Hinzunahme der rekonstruierten H–Isotope einen zu berücksichtigenden Einfluß auf die Verteilung hat.

3.5 Normierung auf die Systemgröße

Mit Änderung des Kontrollparameters Z_{BOUND} ändert sich sowohl die Anregungsenergie, als auch die Systemgröße. Die Abnahme der IMF–Multiplizität zu kleinen Z_{BOUND}–Bereichen hin wird teilweise durch die damit einhergehende Verkleinerung der Größe des Systems, teilweise durch die Erhöhung der Anregungsenergie verursacht. Um diese beiden Effekte zu trennen ist es deshalb notwendig, die Observablen auf die Systemgröße zu normieren. Dies ist in Abbildung 24 für die Mittelwerte der Observablen M_{IMF},Z_{max} und M_2 gezeigt.
Die offenen Symbole zeigen die Verteilung unter Vernachlässigung der Systemgrößenvariation, die Größe Z_{sys} wurde als konstant der Projektilgröße angenommen, als Funktion von Z_{BOUND}/Z_{PROJ}.
Bei den mit den quadratischen Symbolen gezeigten Verteilungen wurden die Observablen auf die Systemgröße Z_0 aus Gleichung (7) normiert. Man erkennt, daß sich das Maximum der IMF–Produktion zu einem kleineren Z_{BOUND}-Wert verschiebt, der in etwa der Bindungsenergie von 8 MeV/Nukleon entspricht (Abb. 22). Für noch größere Anregungs-

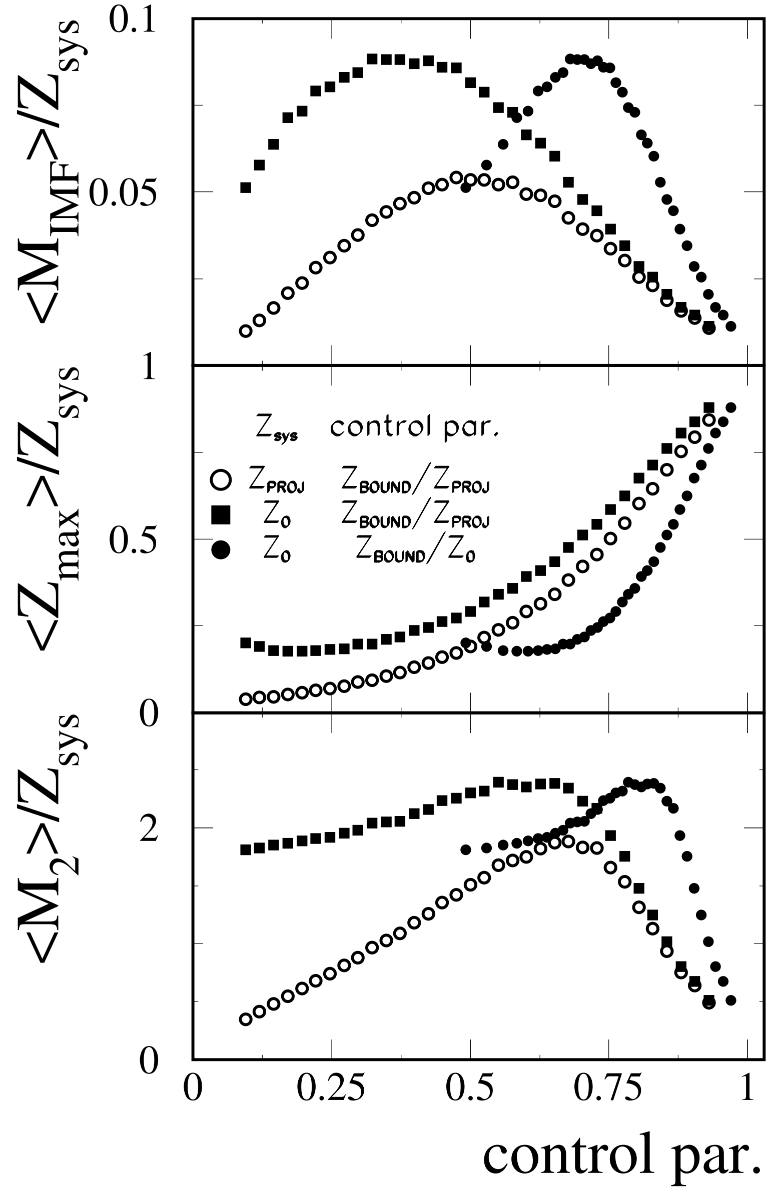

Abbildung 24: Auswirkungen unterschiedlicher Normierung der Verteilungen auf die Observablen M_{IMF},Z_{max} und M_2. Die offenen Kreise zeigen den Verlauf der Mittelwerte der Observablen M_{IMF},Z_{max} und M_2 ohne Normierung auf die Systemgröße, sie wurde hier als konstant der Projektilladung Z_{PROJ} angenommen. Bei dem durch die Quadrate dargestellten Verlauf wurden die Observablen auf die tatsächliche Systemgröße Z_0 normiert. Bei den geschlossenen Kreisen wurde zusätzlich der Kontrollparameter Z_{BOUND} auf die Systemgröße normiert.

energien geht die Produktion von mittelschweren Fragmenten dann wieder zurück. Dieser Rückgang zeigt, daß in diesem Bereich der Projektilrestkern so hoch angeregt wird, daß er vornehmlich in leichtere Teilchen als IMF's zerfällt, der wahre "fall" der Multifragmentation [Zude 95].

Die Kreise zeigen die Verteilung, bei der auch Z_{BOUND} auf die Systemgröße normiert wurde; diese Größe gibt an, welcher Bruchteil der Ladung des Prefragments nach dem Zerfall noch in gebundenen Teilchen enthalten ist. Das Maximum der IMF–Produktion liegt hier bei ca. 0.7, d.h. die abgedampften H-Isotope des Projektilrestkerns machen 30% der ursprünglichen Ladung des Prefragments aus.

In der in Kapitel 5.1 beschriebenen Analyse wird versucht werden, aus der Steilheit des Anstiegs der Größe des schwersten Fragments Z_{max} und der Steilheit der Flanken der M_2-Verteilung die kritischen Exponenten γ und β zu bestimmen. Die in Abbildung 24 erkennbare Variation macht die Wichtigkeit der Normierung auf die tatsächliche Systemgröße deutlich und zeigt die Abhängigkeit vom verwendeten Kontrollparameter. Dies muß in der Interpretation der auf diese Weise erhaltenen Ergebnisse berücksichtigt werden.

4 Phasenübergänge und kritische Phänomene

4.1 Der Flüssig–Gas–Phasenübergang

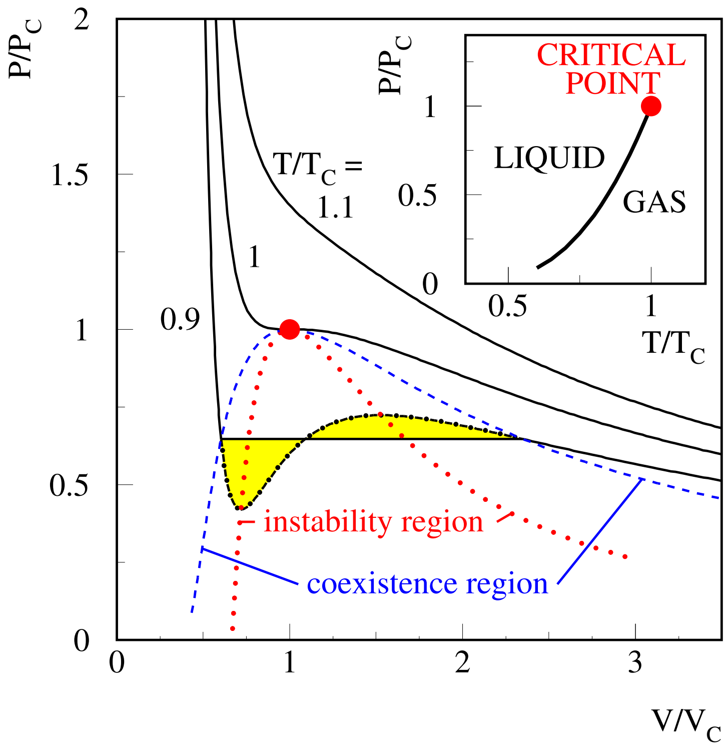

Abbildung 25: Phasendiagramm eines van der Waals Gases.

Zur Illustration des Phasenübergangs von gasförmigem zu flüssigem Zustand ist in Abbildung 25 das Phasendiagramm für ein van der Waals Gas dargestellt. Seine Eigenschaften sind durch die folgenden thermische und kalorische Zustandsgleichungen gegeben:

$$P = P(T, v) = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2} \tag{9}$$

$$E = E(T, V, N) = \frac{3}{2} N k_B T - N \frac{a}{v} \tag{10}$$

Dabei ist $v = V/N$, a und b sind positive Parameter, die für verschiedene Materialien unterschiedliche Werte haben. Für subkritische $(T < T_C)$ Isothermen gibt es einen unphysikalischen, mechanisch instabilen Bereich mit negativer Kompressibilität :

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \tag{11}$$

Für diesen ist die Isotherme durch eine waagerechte Linie konstanten Druckes P_d zu ersetzen, so daß die Integrale über und unter dieser Linie gleich groß sind (Maxwell–Konstruktion). Daraus erhält man für jede Temperatur T ($< T_C$) einen Übergangsdruck P_d, die Dampfdruckkurve P_d(T). Die so durch Isobaren ersetzten Bereiche stellen den Koexistenzbereich beider Phasen dar. Der Koexistenzbereich wird mit zunehmender Temperatur immer kleiner und verschwindet bei der kritischen Temperatur T_C, dort endet dann auch die Dampfdruckkurve. Für Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur findet kein Phasenübergang mehr statt. Phasenübergänge, die die Dampfdruckkurve abseits des kritischen Punktes schneiden, sind von 1. Ordnung. Der dort auftretende Sprung in der Enthalpie $H = E + PV$ äußert sich in einer latenten Wärme. Die latente Wärme pro Teilchen q beim Übergang von flüssigem zu gasförmigen Zustand berechnet sich aus der Enthalpiedifferenz nach:

$$q = P\left(v_{gas} - v_{liq}\right) + \frac{a}{v_{liq}} - \frac{a}{v_{gas}} \tag{12}$$

Verschiebt man den Übergangspunkt zum kritischen Punkt hin, verschwinden die Sprünge in den thermodynamischen Potentialen und damit auch die latente Wärme. Der Phasenübergang am kritischen Punkt ist von 2. Ordnung. Die Lage des kritischen Punktes ist durch die Bedingungen

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = 0 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_T = 0 \tag{13}$$

gegeben. Daraus ergibt sich als Beziehung zwischen den Virialkoeffizienten a,b und den kritischen Größen T_C,P_C und v_C :

$$v_C = 3b\ , \qquad k_B T_C = \frac{8}{27}\frac{a}{b} \qquad \text{und} \qquad P_C = \frac{a}{27b^2} \tag{14}$$

Mit den reduzierten Grössen $T' = T/T_C$,$P' = P/P_C$ und $V' = V/V_C$ läßt sich die van der Waals–Gleichung in der dimensionslosen Form

$$(P' + \frac{3}{V'^2})(3V' - 1) = 8T' \tag{15}$$

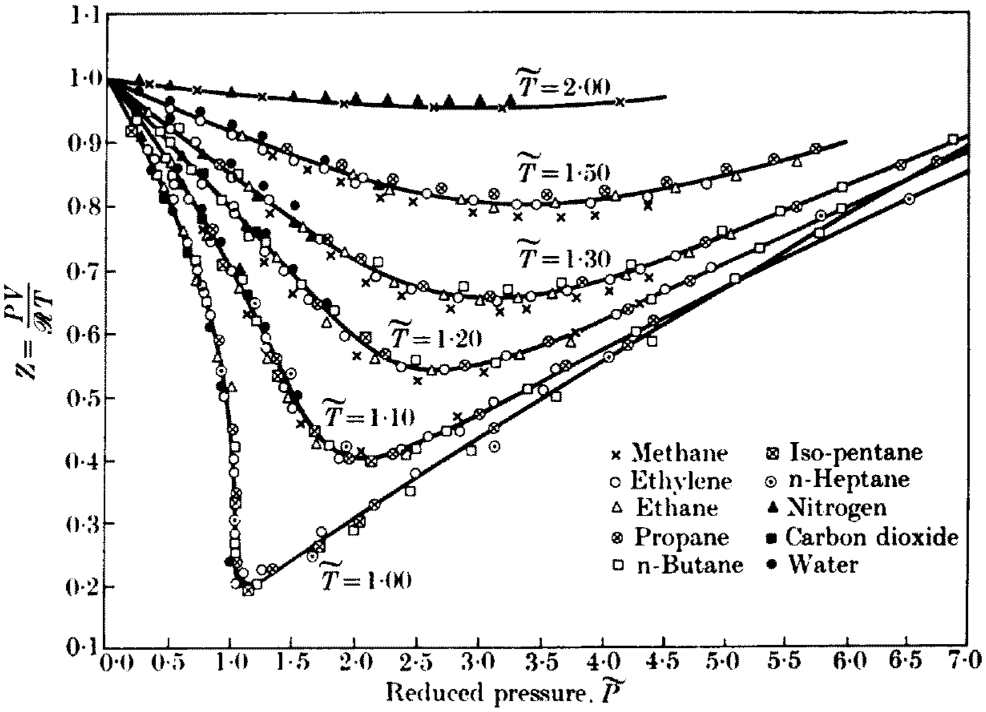

Abbildung 26: Prinzip der korrespondierenden Zustände : Die Kompressibilität pV/RT als Funktion des reduzierten Drucks für verschiedene Werte der reduzierten Temperatur wird für verschiedene Materialien durch eine gemeinsame Kurve beschrieben.
Aus [Stan 71].

schreiben. Zustände verschiedener Systeme mit gleichen reduzierten Größen werden als korrespondierende Zustände bezeichnet. Reduzierte Dampfdruckkurve P'(T'), reduzierte Isothermen P'(V') und reduzierte latente Wärme $q/k_B T_C$ sind für alle Substanzen, welche durch eine van der Waals Gleichung beschrieben werden, gleich. Dieses Prinzip der korrespondierenden Zustände gilt nicht nur für van der Waals Systeme; auch experimentell findet man eine bemerkenswerte Bestätigung der generelleren Annahme, daß verschiedene Materialien gleiches Verhalten zeigen sollten, solange P,V und T in Einheiten ihrer kritischen Werte gemessen werden (siehe Abb. 26).

Viele thermodynamische Größen zeigen bei Annäherung an den kritischen Punkt ein Verhalten, das sich durch Potenzgesetze beschreiben läßt. Als Beispiel sind in Abbildung 27 die auf die kritische Dichte $\rho_C = 1/v_C$ normierten Dichtedifferenzen von gasförmigem, bzw. flüssigem Zustand zum kritischen Wert und die Dichtedifferenz der beiden Phasen

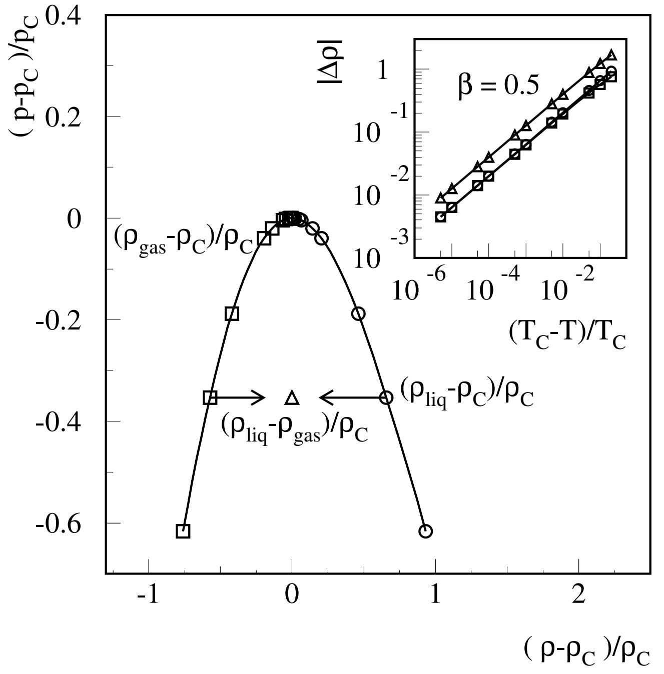

Abbildung 27: Definition des kritischen Exponenten β eines Flüssig–Gas-Systems. Die Temperaturabhängigkeit der Differenzen der Dichte des Gases (Quadrate), bzw. der Flüssigkeit (Kreise) von der kritischen Dichte, oder die Dichtedifferenz zwischen Flüssigkeit und Gas (Dreiecke) beim Phasenübergang lassen sich durch ein Potenzgesetz beschreiben, erkennbar an dem linearen Verhalten in der doppeltlogarithmischen Darstellung. Der kritische Exponent β kann bei Temperaturen hinreichend nahe der kritischen Temperatur aus der Steigung der Geraden ermittelt werden.

untereinander gezeigt. Die Temperaturabhängigkeit läßt sich durch ein Potenzgesetz der Form

$$\frac{\rho_{liq}-\rho_{gas}}{\rho_C} \propto \left|\frac{T-T_C}{T_C}\right|^{\beta}, \qquad T \leq T_C \tag{16}$$

beschreiben. Die isotherme Kompressibilität κ_T divergiert am kritischen Punkt. Auch hier läßt sich die Temperaturabhängigkeit durch ein Potenzgesetz beschreiben (Abb. 28):

$$\kappa_T \propto \left|\frac{T-T_C}{T_C}\right|^{-\gamma} \tag{17}$$

Die in diesen Potenzgesetzen auftretenden Exponenten, wie γ und β, werden als kritische Exponenten bezeichnet. Die numerischen Werte betragen $\beta = \frac{1}{2}$ und $\gamma = 1$ für ein van der Waals–System. Die mathematische Definition des zu einer - in einer Umgebung um $\epsilon = 0$ positiv definiten - Funktion f(ϵ) gehörenden kritischen Exponenten λ ist :

$$\lambda = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln f(\epsilon)}{\ln \epsilon} \tag{18}$$

Dies impliziert nicht, daß in irgendeinem Bereich $\epsilon_1 \leq \epsilon \leq \epsilon_2$ die Funktion f(x) als $\ln f(x) = \lambda \cdot \ln x + \text{const.}$ geschrieben werden kann. Wie weit man sich bei einer ex-

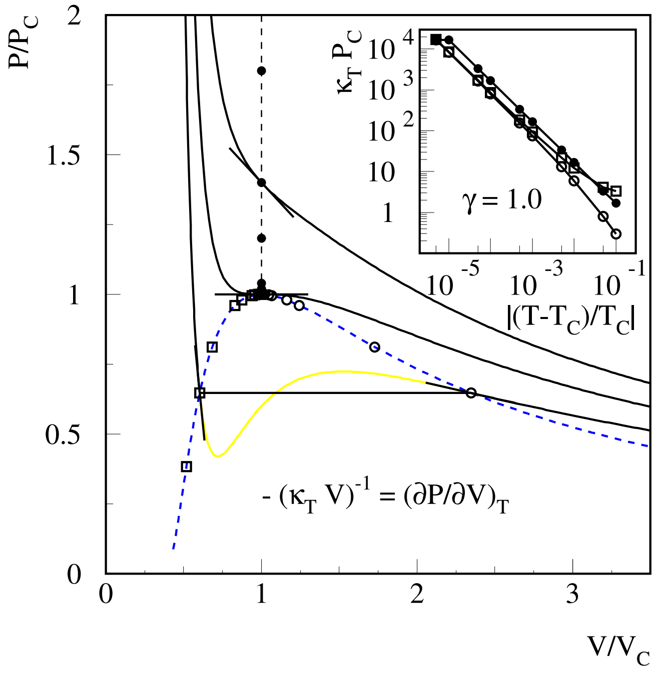

Abbildung 28: Definition des kritischen Exponenten γ eines Flüssig–Gas-Systems. Die Komressibilität wird für Temperaturen über der kritischen bei der kritischen Dichte bestimmt (Punkte), für subkritische Temperaturen auf der Koexistenzlinie wahlweise auf der Flüssigseite (Quadrate) oder auf der Gasseite (Kreise). Auch hier läßt sich die Temperaturabhängigkeit durch ein Potenzgesetz mit dem kritischen Exponenten γ=1 beschreiben.

perimentellen Bestimmung des kritischen Exponenten aus der Steigung einer doppelt-logarithmischen Darstellung dem kritischen Punkt nähern muß, um einen verlässlichen Wert für den kritischen Exponenten zu bekommen, ist von dem untersuchten Exponenten abhängig. Zum Beispiel ist für Temperaturen $T > T_C$ die Kompressibilität bei der kritischen Dichte durch

$$\kappa_T = \frac{1}{6p_C}\left(\frac{T-T_C}{T_C}\right)^{-1} \qquad T > T_C \tag{19}$$

gegeben. Eine doppelt-logarithmische Darstellung ergibt somit im gesamten Bereich $T > T_C$ eine Gerade mit Steigung $-\gamma$. In der Abhängigkeit, der bei den Übergangsdichten der Flüssigphase bestimmten Kompressibilitäten (Quadrate in Abbildung 28), im Bereich subkritischer Temperaturen treten für relative Temperaturen $(T_C - T)/T_C > 10^{-3}$ deutliche Abweichungen auf. Eine Extraktion des kritischen Exponenten aus der Steigung würde hier zu einem falschen Ergebnis führen.

In Abbildung 29 ist die latente Wärme pro Teilchen q in Abhängigkeit der reduzierten Temperatur gezeigt. Auch die latente Wärme zeigt für $T \to T_C$ ein Verhalten der Form $q \propto ((T_C - T)/T)^{\beta}$. Man erkennt, daß schon in unmittelbarer Nähe zum kritischen Punkt, in der sich sehr wohl noch kritisches Verhalten nachweisen und möglicherweise kritische

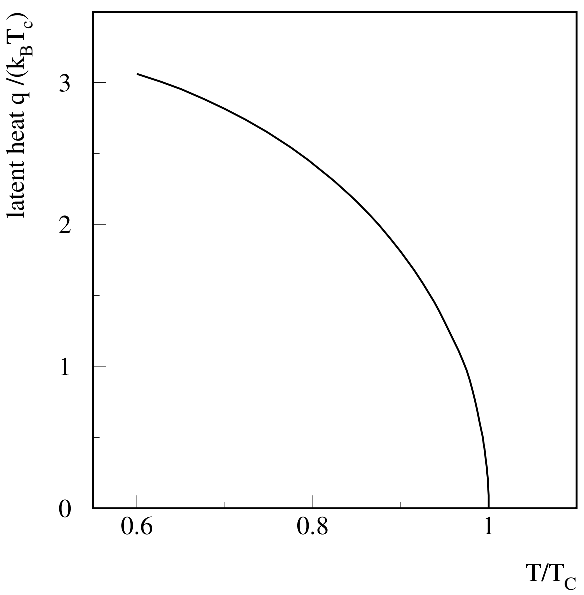

Abbildung 29: Latente Wärme des van der Waals Systems beim Phasenübergang als Funktion der reduzierten Übergangstemperatur.

Exponenten bestimmen lassen, latente Wärmen in der Größenordnung von $k_B T_C$ auftreten.
Die bisher betrachteten thermodynamischen Größen sind in Schwerionen-Kollisionen allesamt nicht einer direkten experimentellen Bestimmung zugänglich. Den Bezug zu den im Experiment gemessenen "Tröpfchengrößen"-Verteilungen stellt das Kondensations-Modell von Fisher [Fish 67] her. Die Größenverteilung der Tröpfchen der Größe A ist danach durch

$$n_A \sim A^{-\tau} X^{A^\sigma} Y^A \tag{20}$$

gegeben, wobei X und Y für $X = \exp\left(-a'_S(T)/T\right)$ und $Y = \exp\left(-\left[a'_V(T) - \mu(T)\right]/T\right)$ stehen. τ und σ sind dabei zwei neue kritische Exponenten, die über

$$\gamma = (3-\tau)/\sigma \tag{21}$$

$$\beta = (\tau - 2)/\sigma \tag{22}$$

mit den zuvor genannten zusammenhängen [Fish 67]. $a'_S(T)$ und $a'_V(T)$ sind der Oberflächen- und Volumenbeitrag zur freien Energie pro Teilchen, $\mu(T)$ ist das chemische Potential pro Teilchen [Pana 84]. Die Abhängigkeit der mittleren Oberfläche F_{surf}(A) eines Tröpfchens von seiner Größe s wird dabei als $F_{surf}(A) \propto A^\sigma$ angenommen. In der Koexistenzphase im Bereich subkritischer Temperaturen ist Y=1 [Pana 84] und (20) vereinfacht sich zu

$$n_A \sim A^{-\tau} \exp\left(-a'_S(T) A^{\sigma}/T\right). \tag{23}$$

Am kritischen Punkt ist das System skaleninvariant, das heißt es gibt keine ausgezeichnete Längenskala mehr. X und Y werden identisch eins, und die Größenverteilung ist durch ein reines Potenzgesetz $n_A \sim A^{-\tau}$ gegeben. Das Auftreten von Tröpfchen mit einer der Lichtwellenlänge vergleichbaren Größe führt zu einer starken Lichtstreuung, dieses Phänomen ist als kritische Opaleszenz bekannt. In der Gasphase ($T > T_C$) ist X∼1, und man erhält [Pana 84]:

$$n_A \sim A^{-\tau} \exp\left(-\left[a'_V(T) - \mu(T)\right] A/T\right). \tag{24}$$

4.2 Allgemeine Beschreibung, Definition der kritischen Exponenten

Phasenübergänge lassen sich in einer allgemeinen, formalen Sprache beschreiben, die eine natürliche Definition der kritischen Exponenten und deren Zusammenhänge ohne Bezug auf ein spezielles System erlaubt: Die Landau–Theorie.

Der kritische Punkt ist beim Flüssig-Gas-Phasenübergang (FG) das Ende der Dampfdruckkurve bei der kritischen Temperatur T_C und dem kritischen Druck P_C. Beim Phasenübergang ferromagnetischer Materialien vom ferromagnetischen Zustand (nicht verschwindende Magnetisierung ohne äußeres Magnetfeld) zum paramagnetischen Zustand ist er durch die kritische Temperatur T_C, Curie-Temperatur, und der Bedingung keines äußeren Magnetfeldes gegeben (T_C,B=0). Definiert man das äußere Feld h als das Magnetfeld B, bzw. der Abweichung des Drucks von seinem kritischen Wert, also [Flie 93]

$$h = \begin{cases} P - P_C & \text{Druck (FG)} \\ B & \text{Magnetfeld (M)} \end{cases}$$

so ist der kritische Punkt durch (T_C,h=0) gegeben. Zur theoretischen Behandlung des Phasenübergangs bedarf es der Festlegung einer Größe, die sich auf charakteristische Weise am Übergangspunkt ändert, des Ordnungsparameters ψ. Er wird immer so gewählt, daß sein Mittelwert am kritischen Punkt verschwindet .

$$\overline{\psi}(T_C, 0) = 0$$

Der Ordnungsparameter ψ beschreibt die Änderung der Struktur am Phasenübergang durch :

$$\overline{\psi}(T,0) = \begin{cases} 0 & T \geq T_C \\ \neq 0 & T < T_C \end{cases}$$

Beispiele für solche Ordnungsparameter sind die Dichtedifferenz im Flüssig-Gas-Phasenübergang (FG) und die Magnetisierung im Übergang paramagnetisch-ferromagnetisch (M).

$$\psi = \begin{cases} n_{liquid} - n_{gas} & (FG) \\ M & (M) \end{cases}$$

Man teilt Phasenübergänge nach dem Verhalten dieses Ordnungsparameters ψ beim Übergang ein :

$$\overline{\psi} = \begin{cases} \text{unstetig} & \text{Übergang 1. Ordnung} \\ \text{stetig} & \text{Übergang 2. Ordnung} \end{cases}$$

Der Phasenübergang an einem kritischen Punkt ist immer von 2. Ordnung [Land 80]. Das Potenzverhalten thermodynamischer Größen für $T \to T_C$ und $h \to 0$ wird durch kritische Exponenten beschrieben. Mit der relativen Temperatur

$$t = \frac{T - T_C}{T_C}$$

erhält man [Flie 93] [Ma 76]:

Ordnungsparameter für $t < 0$,h=0	$\overline{\psi_0} \propto \lvert t \rvert^{\beta}$
Suszeptibilität$\chi = \left(\frac{\delta\overline{\psi}}{\delta h}\right)_T$	$\chi \propto \lvert t \rvert^{-\gamma}$
ψ-h-Relation bei t=0	$h \propto \overline{\psi}^{\delta}$
Korrelationslänge	$\xi \propto \lvert t \rvert^{-\nu}$
Spezifische Wärme C,h=0	$C \propto \lvert t \rvert^{-\alpha}$
Korrelationsfunktion G(k)	$G(k) \propto k^{-2+\eta}$

Die auf diese Weise definierte Suszeptibilität χ entspricht im ferromagnetischen Fall der magnetischen Suszeptibilität χ_M, im Falle des Flüssig-Gas-Phasenübergangs der isothermen Kompressibilität κ_T.

Singularitäten in den Observablen treten erst im thermodynamischen Grenzfall auf, für endliche Systeme bleiben alle Observablen beschränkt.

System	Mean Field	FG	d=3,n=1	M	d=3,n=3
α	$\frac{1}{2}$	0.101-0.116	0.105	-0.09- -0.01	-0.08
β	$\frac{1}{2}$	0.316-0.327	0.312	0.32-0.38	0.38
γ	1	1.23-1.25	1.2385	1.37-1.43	1.38
ν	$\frac{1}{2}$	0.619-0.631	0.6305	0.700-0.725	0.715
η	0		-0.010		0.063
δ	3		5.063		4.645
τ	$2\frac{1}{3}$		2.201		2.216
σ	$\frac{2}{3}$		0.645		0.5682

Tabelle 2: Die gemessenen kritischen Exponenten für den Flüssig-Gas-Phasenübergang (FG) und den ferromagnetischen Phasenübergang (M) im Vergleich zu den Werten aus Mean-Field-Theorien und dem isotropen n-Vektor-Modell in 3 Dimensionen. [Zinn 93]

Die kritischen Exponenten hängen neben der Raumdimension d von der Dimension des Ordnungsparameters n und den Symmetrieeigenschaften des Raumes und des Ordnungsparameters ab. Für den Ordnungsparameter Dichtedifferenz (Skalar) im Flüssig-Gas-Phasenübergang ist n=1, für den Ordnungsparameter Magnetisierungsvektor im ferromagnetischen Phasenübergang ist n=3. Lediglich zwei der kritischen Exponenten sind unabhängig, die anderen sind über Skalengesetze miteinander verbunden :

$$\begin{aligned}
&\nu = \gamma/(2-\eta) \\
&\alpha = 2 - \nu d \\
&\beta = \tfrac{1}{2}\nu(d-2+\eta) \\
&\delta = (d+2-\eta)/(d-2+\eta)
\end{aligned}$$

Mean-Field-Theorien ermöglichen zwar die Berechnung der ungefähren Lage des kritischen Punktes im Phasendiagramm und ergeben qualitativ das richtige kritische Verhalten, man erhält aber universelle Werte für die kritischen Exponenten, die quantitativ nicht mit den experimentellen Werten übereinstimmen. Das Problem liegt in der Divergenz der Korrelationslänge bei Annäherung an den kritischen Punkt und den dadurch auf allen Längenskalen auftretenden Fluktuationen. Dadurch läßt sich (für Raumdimension d=3) kein endliches Volumen finden, bei dem durch Mittelung über dieses die Fluktuationen der untersuchten Größe klein gegen den Mittelwert werden, was aber eine Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit von Mean-Field-Theorien ist.

Quantitativ richtige Werte für die Exponenten erhält man aus der Renormalisierungsgruppen-Theorie (RG) [Wils 79, Ma 76]. In Tabelle 2 sind zum Vergleich die experimentell gemessenen Werte den theoretischen Werten für Mean-Field-Theorien und den aus dem RG-Ansatz für das isotrope n-Vektor-Modell (bei Raumdimension d=3) berechneten gegenübergestellt. Die aus dem RG-Ansatz berechneten Werte stimmen innerhalb der experimentellen Fehler in beiden Fällen gut mit den gemessenen Werten überein, obwohl im FG-Fall nicht die volle Symmetrie des Ordnungsparameters gegeben ist.

4.3 Der Phasenübergang im Perkolations-Modell

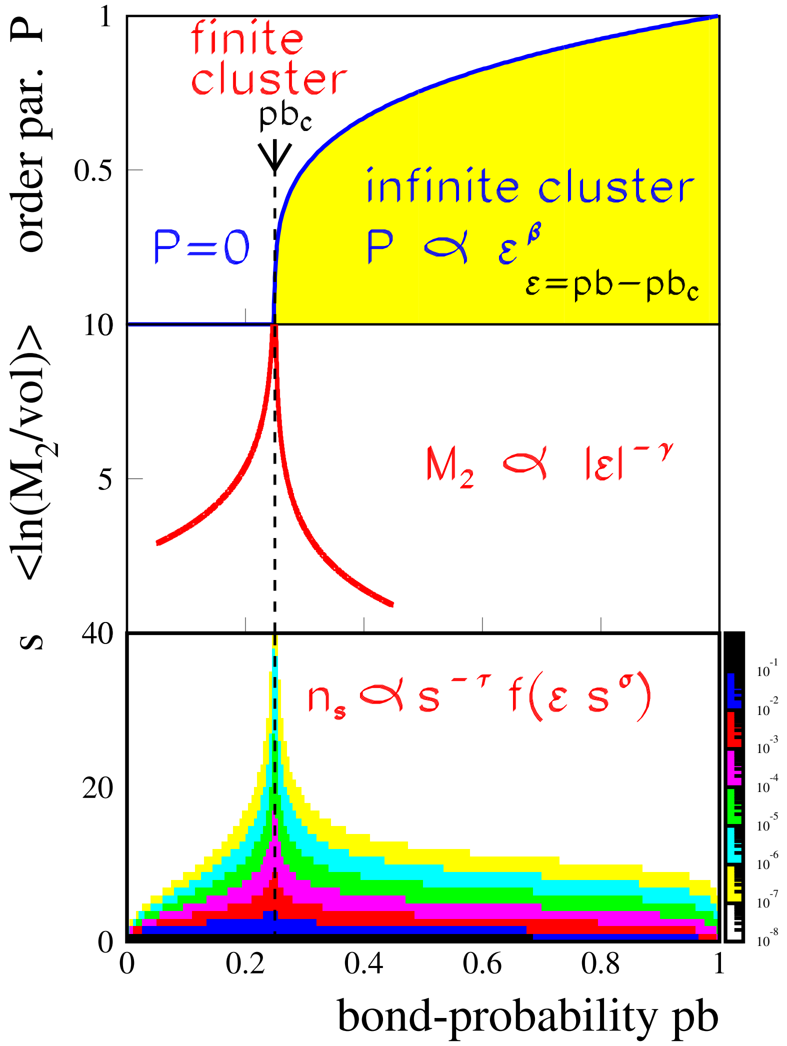

Abbildung 30: Schematische Darstellung des Phasenübergangs im Perkolation-Modell.

Für das (Bond-)Perkolationsmodell muß zunächst ein Gitter definiert werden, die Gitterplätze werden dabei von den Sites eingenommen. Zwei benachbarte Sites können mit einem Bond verbunden sein. In dem in dieser Arbeit verwendeten Modell ist dies ein einfach kubisches Gitter, d.h. jedes Site hat 6 nächste Nachbarn und damit 6 mögliche Bonds. Die Wahrscheinlichkeit, daß zwischen zwei beliebigen, benachbarten Sites eine Verbindung besteht, ist die Bond-Wahrscheinlichkeit pb. Alle über Bonds miteinander verbundenen Sites bilden ein Cluster, die Größe s dieses Clusters ist die Anzahl der in ihm enthaltenen Sites. Die kritische Bondwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, bei der zum ersten Mal (in einem unendlichen System) ein unendliches Cluster Auftritt. Für Wahrscheinlichkeiten kleiner diesem kritischen Wert existiert kein unendliches Cluster. Dies kann als ein Phasenübergang 2. Ordnung aufgefaßt werden, er ist schematisch in Abbildung 30 dargestellt.

Der Ordnungsparameter in diesem Modell ist die Wahrscheinlichkeit P, daß ein beliebiger Site zu einem unendlichen Cluster gehört. Mit $\epsilon = pb - pb_C$ wird der Phasenübergang bei der kritischen Bondwahrscheinlichkeit pb_C beschrieben durch $P = 0$ für $\epsilon \leq 0$ und $P > 0$ für $\epsilon > 0$. Der mit dem Ordnungsparameter verknüpfte kritische Exponent β ist definiert durch :

$$P \propto \epsilon^{\beta} \quad \epsilon > 0 \tag{25}$$

Der Bruchteil (1-P) der Sites gehört zu endlichen Clustern. Für die Clustergrößenverteilung n_s = Anzahl der Cluster mit Größe s/Gittersite dieser endlichen Cluster macht man den Skalenansatz :

$$n_s = s^{-\tau} f(\epsilon s^{\sigma}) \tag{26}$$

τ und σ sind dabei zwei unabhängige Parameter.

Für ein System bei der kritischen Bondwahrscheinlichkeit $\epsilon = 0$ erhält man für die Clusterverteilung ein Potenzgesetz :

$$n_s(\epsilon = 0) = s^{-\tau} \tag{27}$$

Das k-te Moment der Clusterverteilung ist durch

$$M_k := \sum_{s,finite} s^k n_s \tag{28}$$

definiert. Für die höheren Momente ($k \geq 2$) findet man das asymptotische Verhalten [Stau 91]:

$$M_k \propto \mid \epsilon \mid^{\frac{\tau-1-k}{\sigma}} \tag{29}$$

Für den Ordnungsparameter P erhält man im Bereich $\epsilon > 0$ eine Abhängigkeit der Form

$$P(\epsilon > 0) \propto \epsilon^{\frac{\tau-2}{\sigma}} \tag{30}$$

3d-Bond-Perkolation				
pb_C(sc)=0.2488				
γ	β	τ	σ	ν
1.80	0.41	2.18	0.45	0.88

Tabelle 3: Kritische Exponenten für das 3 dimensionale Bond-Perkolations-Modell und kritische Bondwahrscheinlichkeit für das einfach kubische (sc) Gitter [Stau 91].

und für das zweite Moment M_2 das asymptotische Verhalten :

$$M_2 \propto \mid \epsilon \mid^{\frac{\tau-3}{\sigma}} . \tag{31}$$

Definiert man den kritischen Exponenten γ über das 2. Moment

$$M_2 \propto \mid \epsilon \mid^{-\gamma}, \tag{32}$$

so erhält man aus (30) als Beziehung der über (25) und (32) definierten Exponenten γ und β mit den in (26) definierten Exponenten τ und σ :

$$\gamma = (3 - \tau)/\sigma \tag{33}$$

$$\beta = (\tau - 2)/\sigma \tag{34}$$

Der Ansatz (26) für die Clustergrößenverteilung ist identisch mit dem aus dem Tröpfchenmodell (20). Die Übereinstimmung dieser beiden Relationen mit denen aus dem Tröpfchnenmodell ((21),(22)) beweist die numerische Identität der durch P und das zweite Moment definierten kritischen Exponenten γ und β mit denen über die Dichtedifferenz und Kompressibilität definierten für den Flüssig-Gas-Phasenübergang.
Die Werte für die kritischen Exponenten für das 3-dimensionale Bond-Perkolation-Modell sind unabhängig von der Gitterstruktur [Stau 91]. Sie sind zusammen mit der kritischen Bond-Wahrscheinlichkeit für das verwendete einfach kubische (sc,simple cubic) Gitter in Tabelle 3 aufgeführt.

4.4 … bei endlicher Systemgröße

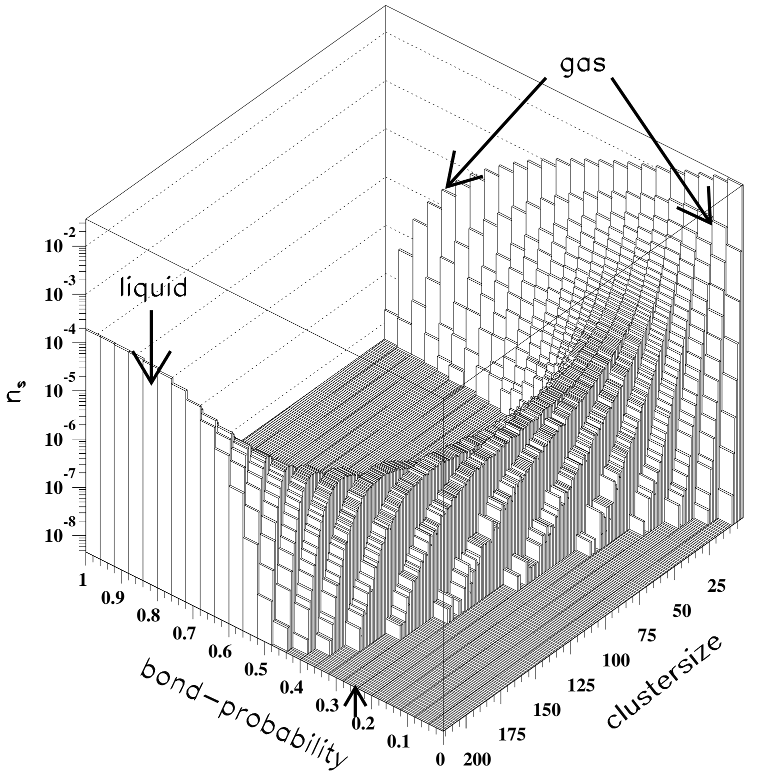

Abbildung 31: Clustergrößenverteilung bei einer Gittergröße von L=6. Die kritische Bond-Wahrscheinlichkeit für ein unendliches System ist durch einen Pfeil markiert.

Der im vorigen Kapitel beschriebene Phasenübergang basiert wesentlich auf der Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Clustern. Da es in einem endlichen System kein unendlich großes Cluster geben kann, stellt sich die Frage, wie man hier den Phasenübergang definiert. Dazu ist in Abbildung 31 die Clustergrößenverteilung n_s für ein Gitter der Größe L=6, d.h. 6x6x6=216 Sites, gezeigt.

Für kleine Bond-Wahrscheinlichkeiten ($pb < 0.15$) findet man eine exponentiell mit der Clustergröße abfallende Verteilung kleiner Cluster. Für eine Bond-Wahrscheinlichkeit um die kritische Wahrscheinlichkeit ($pb \approx pb_C = 0.25$) treten Cluster nahezu aller möglichen

Größen auf. Die Verteilung entspricht hier annähernd einem Potenzgesetz. Für große Bond-Wahrscheinlichkeiten ($pb > 0.4$) findet man neben einer Verteilung leichter Cluster ein mit der Systemgröße vergleichbares Cluster.

Man identifiziert nun dieses große Cluster als Repräsentant des unendlichen Clusters. In Analogie zum Flüssig-Gas-Phasenübergang spielt er die Rolle der Flüssigkeit, die leichten Cluster die Rolle des Gases. Der Bereich großer Bond-Wahrscheinlichkeiten ($pb > pb_C$) wird deshalb fortan auch Flüssig-Bereich genannt, der kleiner Bond-Wahrscheinlichkeiten ($pb < pb_C$) auch Gas-Bereich.

Der Ordnungsparameter P wird somit angenähert durch :

$$P \approx S_{max}/Systemgröße \tag{35}$$

Bei der Berechnung der Momente der Clusterverteilung muß nun im Flüssig-Bereich das größte Cluster ausgenommen werden, wobei im Gas-Bereich die Summe über alle vorhandenen Cluster läuft :

$$M_2 \approx \begin{cases} \sum_{s \neq s_{max}} s^2 n_s & (pb > pb_C) \quad \text{Flüssig-Bereich} \\ \sum_s s^2 n_s & (pb < pb_C) \quad \text{Gas-Bereich} \end{cases} \tag{36}$$

Die Mittelwerte des so genäherten Ordnungsparamter und des auf die Systemgröße normierten zweiten Moments sind in Abhängigkeit der Bondwahrscheinlichkeit für Gitter der Größe L=4,6,20,63 in Abbildung 32 gezeigt.

Für große Systeme zeigt der so angenäherte Ordnungsparameter P ein Verhalten ähnlich dem eines unendlichen Gitters. Er ist für Bondwahrscheinlichkeiten kleiner als der kritische Wert klein und steigt beim Überschreiten der kritischen Bondwahrscheinlichkeit sprunghaft an. Dieses den Phasenübergang charakterisierende Verhalten schmiert zu kleineren Systemgrößen hin aber immer mehr aus. Die zweite Moment Verteilung zeigt für das L=63 Gitter einen deutlichen Peak bei ungefähr der kritischen Bondwahrscheinlichkeit des unendlichen Systems. Der Peak ist mit kleinerer Systemgröße immer weniger ausgeprägt und verschiebt sich zu größeren Wahrscheinlichkeiten.

Die Clustergrößenverteilung für die verschiedenen Systeme bei einer Bond-Wahrscheinlichkeit von 0.05 (Gas-Bereich) und der kritischen Bond-Wahrscheinlichkeit sind in Abbildung 33 gezeigt. Im ersten Fall entspricht die Verteilung einem Exponentialgesetz. Bei der kritischen Bond-Wahrscheinlichkeit entspricht sie einem Potenzgesetz. Bei den L=4,6 Systemen führt die kleine Systemgröße von nur 64, bzw. 216, Sites zu einem Abschneiden

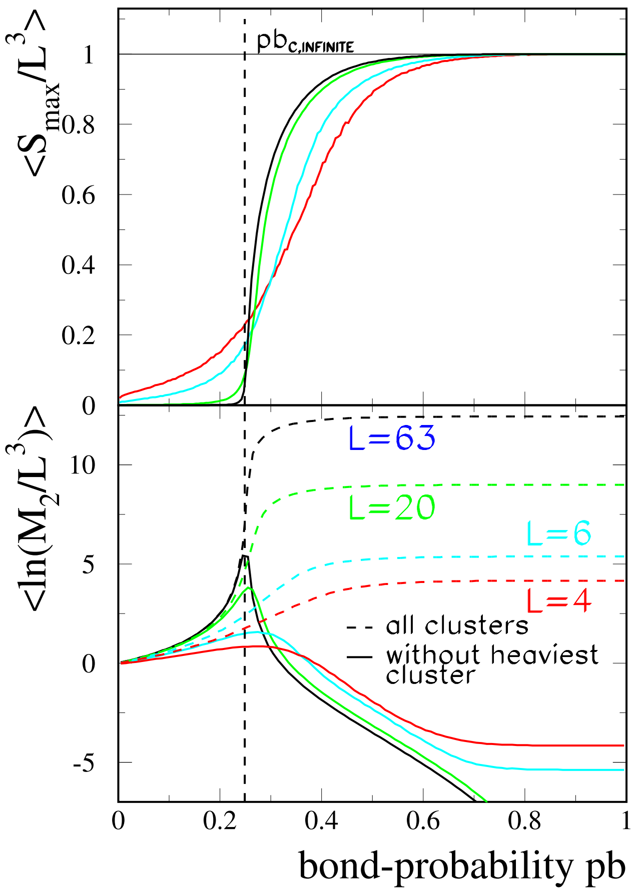

Abbildung 32: Systemgrößenabhängigkeit der Mittelwerte der normierten maximalen Clustergröße S_{max}/L^3 und des normierten zweiten Moments M_2/L^3 als Funktion der Bond-Wahrscheinlichkeit pb.

der Verteilung. Davon ist der gesamte Bereich von Clustern größer als etwa ein Drittel der Systemgröße betroffen. Im Bereich kleiner einem Drittel der Systemgröße zeigt aber selbst hier die Verteilung den Verlauf eines Potenzgesetzes mit einem ähnlichen Abfallparameter wie für die großen Systeme.

Man erkennt, daß bei Systemgrößen, die vergleichbar mit der Anzahl von Nukleonen in schweren Atomkernen (L=6),bzw. der Ladungszahl (L=4,5) sind, die für die Bestimmung von kritischen Exponenten zugrundeliegende Verteilungen gegenüber den Verteilungen von großen Systemen schon deutlich deformiert sind. Inwieweit sie dennoch zur Bestimmung kritischer Exponenten herangezogen werden können, wird im Kapitel 5 im Detail

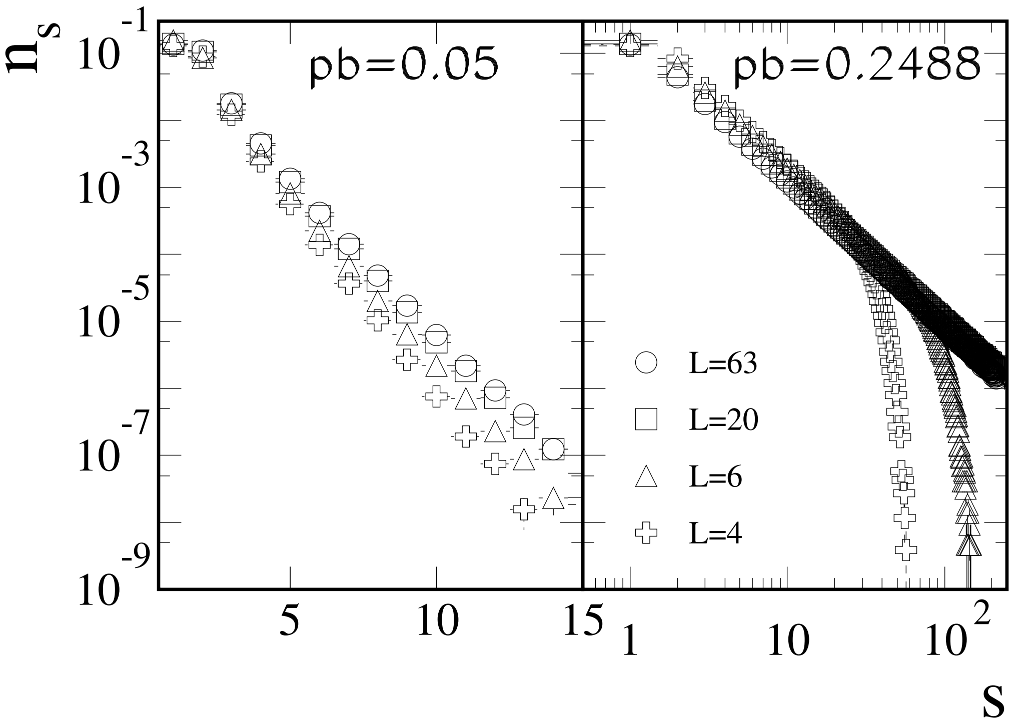

Abbildung 33: Clustergrössenverteilung der Systeme der Grösse L=4,6,20,63 für die Bond-Wahrscheinlichkeit 0.05 und die kritische Bond-Wahrscheinlichkeit pb_C=0.2488 .

untersucht.

Ein weiteres Handikap bei der Analyse der Daten ist, daß der Kontrollparameter, in diesem Fall die Temperatur, des Systems nicht direkt beobachtbar ist, statt dessen werden zur Klassifizierung der Ereignisse aus den Ladungsverteilungen selbst berechnete Größen, wie die Multiplizität M oder die Zahl gebundener Ladungen Z_{BOUND} verwendet. Für ein unendliches System stellt dies kein Problem dar, solange die verwendete Grösse eine streng monotone Abhängigkeit von der Temperatur in einer Umgebung um den kritischen Punkt besitzt. Dann läßt sich nämlich im thermodynamischen Grenzfall die Temperatur in einer beliebig klein wählbaren Umgebung um die kritische Temperatur als lineare Funktion der Größe schreiben und die Verteilungen liefern in dieser Umgebung die gleichen kritischen Exponenten.

Für endliche Systeme verhindern finite-size-Effekte, beispielsweise das Erscheinen eines abgerundeten Maximums an Stelle der Divergenz, den Grenzwert $T \rightarrow T_C$. Damit können

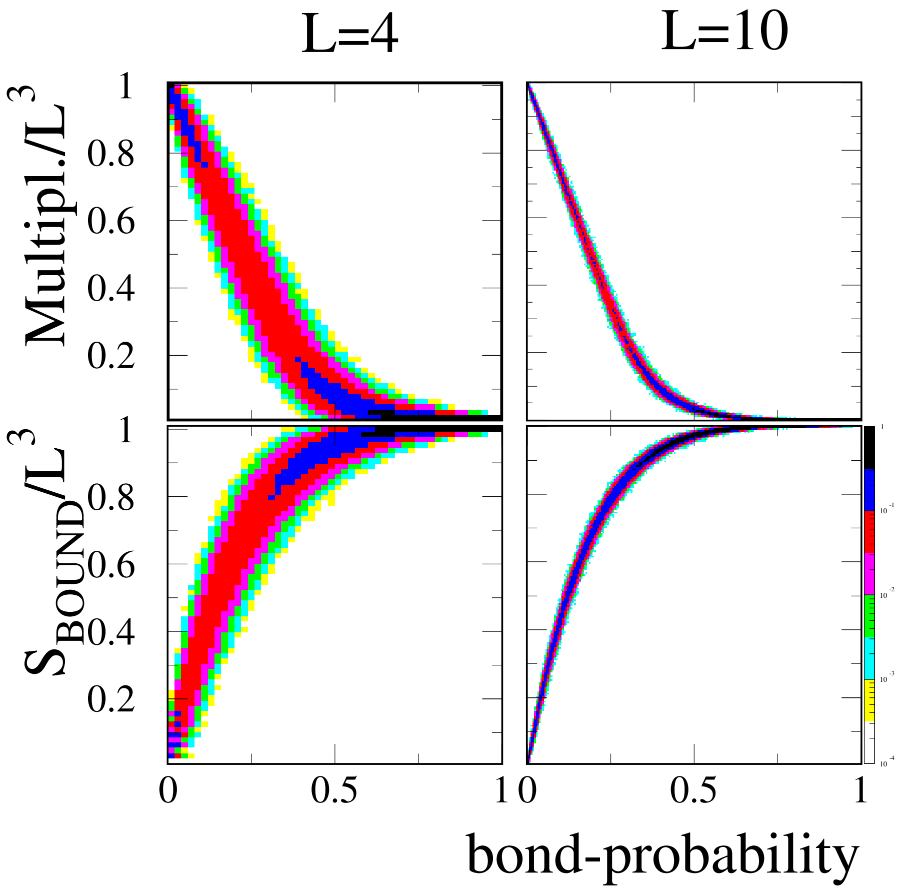

Abbildung 34: Korrelation von S_{BOUND} und der Multiplizität mit pb.

Nichtlinearitäten in der Beziehung der verwendeten Größe von der Temperatur die Resultate verändern. Ein weiterer wichtiger Aspekt stellt die begrenzte Auflösung der verwendeten Größen dar. Die Multiplizität kann nur ganzzahlige Werte von 1 bis zur Systemgröße annehmen. Dies führt zu einer Art Diskretisierungfehler. Außerdem verschlechtert sich die Korrelation der verwendeten Größe mit der Temperatur bei kleiner werdender Systemgröße.

Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 34 die Verteilung der Multiplizität und der Äquivalent zu Z_{BOUND} definierten Grösse $S_{BOUND} = \sum s, s \geq 2$ in Abhängigkeit von der Bondwahrscheinlichkeit für die Gittergrössen L=4 und L=10. Beide Größen zeigen im Bereich kleiner Bond-Wahrscheinlichkeiten bis etwa 0.35 eine annähernd lineare Abhängig-

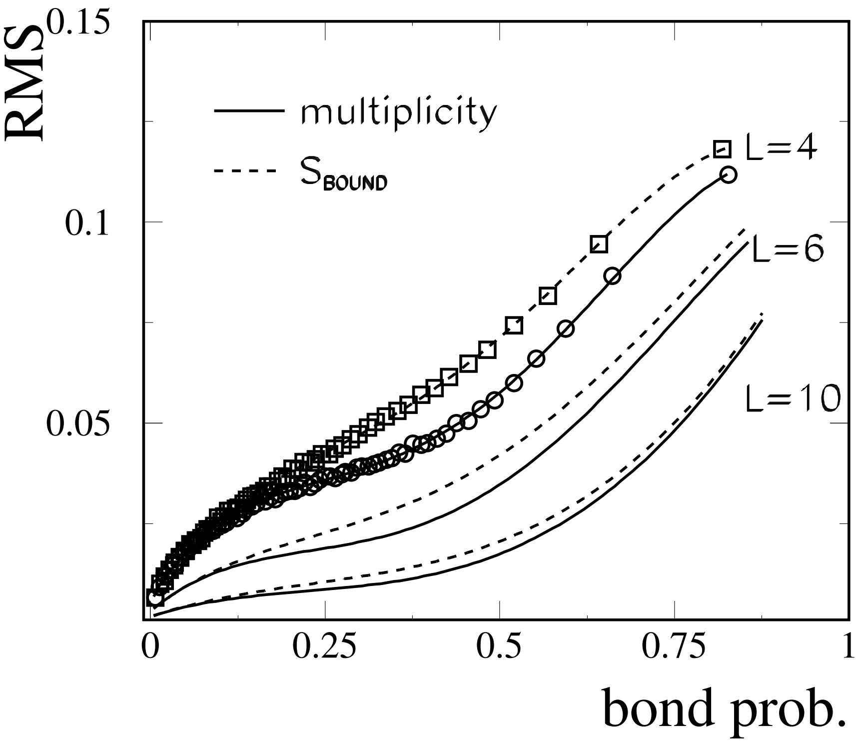

Abbildung 35: Auflösung von S_{BOUND} und der Multiplizität.

keit von pb. Für größere Wahrscheinlichkeiten ist der Verlauf jedoch stark nichtlinear. Im Flüssigbereich $pb > 0.5$ erlaubt keine der beiden Größen eine Bestimmung der Bond-Wahrscheinlichkeit.

Als Maß für die Auflösung beider Observablen ist der RMS-Wert der Verteilung bei festgehaltener Multiplizität, bzw. festgehaltenem Wert für S_{BOUND}, in Abhängigkeit vom Mittelwert der Bond-Wahrscheinlichkeit (bei gleichverteilter Bond- Wahrscheinlichkeitsverteilung) in Abbildung 35 dargestellt. Innerhalb des Perkolationsmodells sind die Observablen Multiplizität und S_{BOUND} äquivalent, was Auflösung und Linearität betrifft.

Der Einfluß des Wechselns von der Bond-Wahrscheinlichkeit auf aus der Ladungsverteilung selbst bestimmten Observablen Methoden zur Bestimmung kritischer Exponenten wird ebenfalls in Kapitel 5 diskutiert.

5 Bestimmung kritischer Exponenten

Der Versuch der Bestimmung kritischer Exponenten soll hier zusammenhängend, anhand verschiedener Methoden erläutert werden. Zunächst lassen sich die kritischen Exponenten γ und β aus der Kontrollparameterabhängigkeit des größten Clusters S_{max} und des 2.Moments aus dem Verhalten

- $M_2 \propto \mid pb - pb_C \mid^{-\gamma}$
- $P \approx S_{max} \propto (pb - pb_C)^{\beta}, pb \geq pb_C$

ermitteln, in denen der Kontrollparameter pb explizit auftritt [Stau 91, Elli 94]. Der dem Flüssig-Gas-Phasenübergang zugrundeliegende Kontrollparameter Temperatur ist natürlich im Experiment unbekannt. Stattdessen kann nur eine aus der Ladungsverteilung selbst berechnete Größe wie Z_{BOUND} zur Charakteriesierung der Ereignisse verwendet werden. Bei diesen Methoden muß deshalb zusätzlich die Abhängigkeit der resultierenden Ergebnisse von der speziellen Wahl des Kontrollparameters untersucht werden. Diese Art der Analyse ist in Kapitel 5.1 untersucht.
Zur teilweisen Kompensation der finite-size-Effekte wurde vorgeschlagen [Camp 86], statt der höheren Momente M_k die mit dem ersten Moment skalierten Momente

$$S_k = M_k / M_1 \tag{37}$$

zu verwenden. In Kapitel 5.2 wird versucht, aus der Korrelation zwischen dem 2.Moment S_2 und der Größe des schwersten Clusters S_{max} das Verhältnis γ/β zu bestimmen [Camp 88]:

- $S_2 \propto (pb - pb_C)^{-\gamma} \propto P^{-\frac{\gamma}{\beta}}, pb \geq pb_C$

Die Untersuchung von Korrelationen - auch im Experiment zugänglicher - Observablen hat den Vorteil, daß kein - im Experiment unbekannter - Kontrollparameter explizit auftritt. Der kritische Exponent τ kann auch direkt aus der Clusterverteilung bestimmt werden. Am kritischen Punkt ist die Clustergrößenverteilung durch ein Potenzgesetz gegeben :

- $n_S \propto s^{-\tau}$

Eine Methode zur Festlegung der Position des kritischen Punktes und des kritischen Exponenten τ durch geeignete Parametrisierung der Clustergrößenverteilungen ist in Kapitel 5.3 beschrieben.

Bei der experimentellen Bestimmung kritischer Exponenten wird in der Regel versucht eine Abhängigkeit der Form $y \propto x^{\alpha}$ als $y = const. \cdot x^{\alpha}$ zu interpretieren. Durch geeignete doppelt-logarithmische Darstellung der Abhängigkeit kann dann durch Anpassung einer Geraden der Exponent aus der Steigung der Geraden extrahiert werden. Diese Interpretation ist nicht zwangsläufig erlaubt, der Fit-Parameter *Steigung* muß nichts mit dem kritischen Exponenten zu tun haben. Dennoch sind der besseren Lesbarkeit wegen im folgenden die Parameter, die den kritischen Exponenten entsprechen sollen, wie selbige benannt. Ist von den kritischen Exponenten die Rede, werden sie auch explizit so genannt.

5.1 Bestimmung von γ und β aus der Momentenverteilung

5.1.1 Die Maximapositionen der Momentenverteilungen

Für ein unendlich großes System erwartet man, daß alle höheren Momente am kritischen Punkt divergieren. Für die zuvor definierten Momente M_2,M_3 und M_4, sowie die skalierten Momente $S_k = M_k/M_1$, sind in Abbildung 36 die Werte des Kontrollparameters in Abhängigkeit von der inversen Systemgröße 1/L[1] gezeigt, an denen die Momenteverteilungen ihr Maximum haben. Die genaue Lage wurde dabei durch eine Anpassung eines Polynoms dritter bis vierter Ordnung in einem Bereich um das Maximum ermittelt. Für divergierende Systemgröße ($1/L \to 0$) konvergieren die Maxima-Positionen auf einen gemeinsamen Wert. Für kleiner werdende Systemgröße beobachtet man eine immer stärkere Verschiebung zum Flüssigen hin (größer werdende Bondwahrscheinlichkeit). Diese Verschiebung ist für verschiedene Momente unterschiedlich. Die skalierten Momente zeigen ein nahezu lineares Verhalten, eine Extrapolation auf $1/L = 0$ ergibt auf 10^{-3} genau den Literaturwert [Stau 91] der kritischen Bondwahrscheinlichkeit von $pb_C = 0.2488$. Für die Multiplizität M und S_{BOUND} als Kontrollparameter sind die durch

$$M_C = \langle M(pb_C)\rangle \qquad \text{,bzw.} \qquad S_{BOUND,C} = \langle S_{BOUND}(pb_C)\rangle \tag{38}$$

definierten kritische Multiplizität und kritisches S_{BOUND} als Strichpunktlinie eingezeichnet. Für diese Kontrollparameter wird die Verschiebung zur flüssigen Seite hin (kleinere Multiplizität,größeres S_{BOUND}) von einer Verschiebung des kritischen Kontrollparameters zur Gasseite (größere Multiplizität, kleineres S_{BOUND}) hin überlagert.

Unabhängig von der Wahl des Kontrollparameters ergibt sich eine Ordnung in den Maximapositionen. Das Maximum von M_2 ist am wenigsten zur flüssigen Seite hin verschoben. Nach einem größeren Abstand folgen M_3 und S_2 an nahezu identischen Positionen, dann nach einem kleineren Abstand das Paar M_4 und S_3 und schließlich, wieder getrennt, S_4. Die Positionen der Maxima der experimentell gemessenene Momentenverteilungen des Projektilaufbruchs von Au und U in der auf die Projektilladung normierten Observablen

---

[1] Aus der finite-size scaling Ansatz erwartet man eine Systemgrößenabhängigkeit der Perkolationsschwelle p_{av} der Form [Stau 91] $p_{av} - p_C \propto L^{-1/\nu}$, mit der sich bei bekanntem p_C der Exponent ν bestimmen läßt. Da diese Methode allerdings für die Kontrollparameter S_{BOUND} und Multiplizität im interressierenden Systemgrößenbereich (L=4 bis L=6) nicht anwendbar ist, wurde zur Darstellung statt $L^{-1/\nu}$ die einfachere Größe 1/L verwendet.

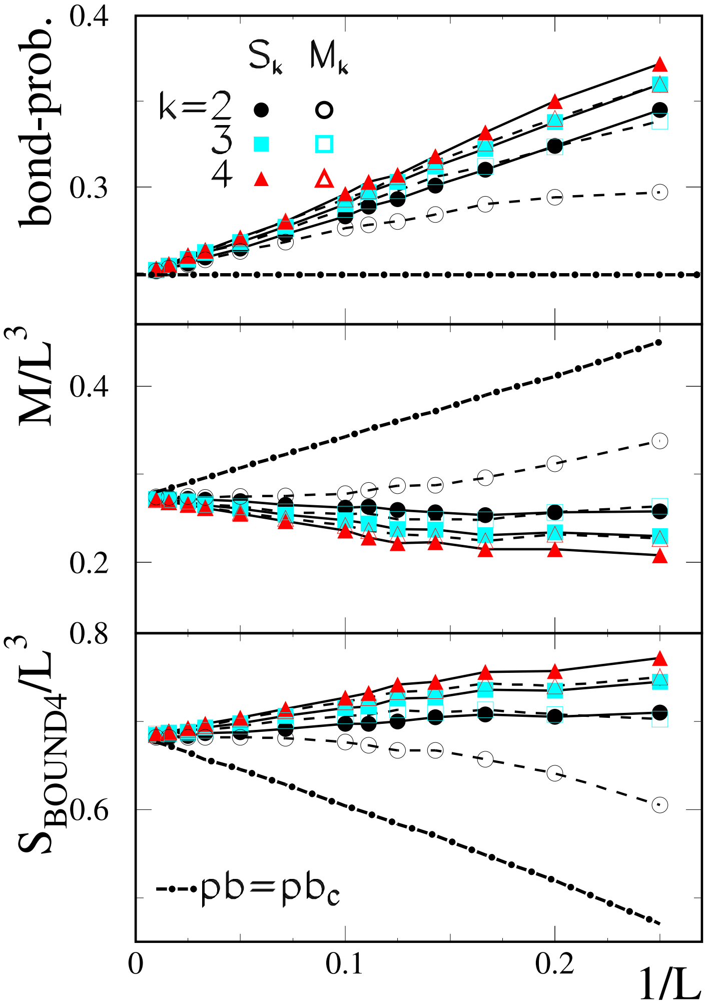

Abbildung 36: Systemgrößenabhängigkeit der Position des Maximums der Momente der Clusterverteilung für die verschiedenen Kontrollparameter Bond-Wahrscheinlichkeit, Multiplizität M und S_{BOUND4}. Die Größe S_{BOUND4} ist hier, abweichend von dem sonst verwendeten S_{BOUND}, als Summe der Clustergrößen aller Cluster größer oder gleich 4 definiert. Da die Positionen der Maxima nur qualitativ verglichen werden können, wurde auf eine erneute Berechnung mit der üblichen Definition von S_{BOUND} aufgrund des großen Rechenaufwands bei den großen Systemen verzichtet.

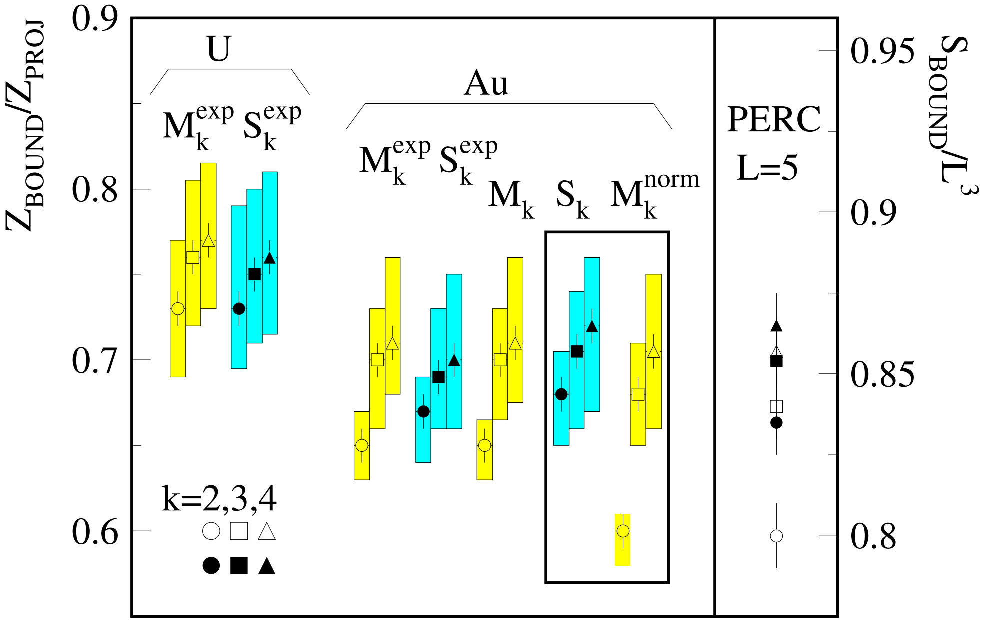

Abbildung 37: Gemessene Maxima-Positionen der Momente M_k und der skalierten Momente S_k für die Fragmentation von Au und U.

Z_{BOUND} sind in Abbildung 37 wiedergegeben. Die Symbole entsprechen der Bedingung (3) zur Abtrennung der Spaltereignisse, die Balken symbolisieren die durch die zuvor besprochene Variation (Kapitel 3.2) dieser Bedingung resultierende Verschiebung in der Maximum-Position. Die Positionen der experimentell gemessenen Verteilungen M_k^{exp} und S_k^{exp}, bei denen die – im Experiment nicht gemessenen – H-Isotope nicht enthalten sind, sind für das Uranprojektil im Vergleich zum Goldprojektil zu signifikant größeren Werten verschoben. Die Variation der Spaltbedingung führt bei Uran zu einer deutlich größeren Verschiebung der Maximumposition des 2.Moments, was man aus Kap. 3.2 auch erwartet. Die für Gold als Projektil bestimmte Systemgröße Z_0 und die daraus rekonstruierte Anzahl von H-Isotopen erlaubt die Bestimmung der Momente M_k und S_k (Kap. 3.4) und die Normierung der Momente auf die Systemgröße $M_k^{norm} = M_k/Z_0$ (Kap. 3.5). Die Korrektur der Momente bewirkt bei den Momenten M_k keine wesentliche Verschiebung der Maximapositionen, die Positionen für die skalierten Momente S_K werden, bedingt durch die merkliche Änderung von M_1, leicht zu größeren Werten verschoben. Für die auf die Systemgröße normierten Momente M_k^{norm} verschieben sich die Positionen der Maxima, besonders deutlich beim 2.Moment, zu kleineren Werten.

Den im Perkolationsmodell bei fester Systemgröße untersuchten Momenten entsprechen am ehesten die auf die Systemgröße normierten Momente M_k^{norm} und die skalierten Momente S_k (Kästchen in Abbildung 37). Das 3.Moment und das skalierte 2.Moment, sowie das 4.Moment und das skalierte 3.Moment, haben ihr Maximum an der gleichen Stelle. Die Position des 2.Moments liegt bei einem deutlich kleineren Wert, die Position des skalierten 4.Moments bei einem etwas gröseren Wert in Z_{BOUND}/Z_{PROJ}. Hier findet sich die gleiche Ordnung der Maximapositionen wie zuvor für das Perkolationsmodell, die Positionen sind zum Vergleich für das L=5 Gitter rechts eingezeichnet.

Allerdings lassen sich die für die Daten gefundenen Werte nicht direkt mit den für das Perkolationsmodell bestimmten Werten vergleichen, da die durch mit Änderung von Z_{BOUND} einhergehende Änderung in der Systemgröße die Lage der Maxima beeinflußt. Dazu sind in Abbildung 38 die jeweils auf die Systemgröße Z_0 normierte größte Ladung Z_{max} und das 2.Moment in Abhängigkeit von Z_{BOUND}/Z_0 gezeigt. Die gestrichelten Linien zeigen den Verlauf der Perkolationsrechnung bei fester Systemgröße L=3,4,5 und 6. Die Clustergröße s wurde dabei als Ladung Z aufgefaßt, die Systemgröße ist in diesem Fall L^3. Die gepunktete Linie verbindet die Maxima-Positionen des 2.Moments der vier Gittergrößen. In den Daten ändert sich mit Z_{BOUND}/Z_0 auch die Systemgröße Z_0. Dieser Effekt wurde in den Perkolationsrechnungen dadurch modelliert, daß aus der Systemgröße Z_0 eine effektive lineare Größe $l = Z_0^{1/3}$ bestimmt und der entspechende Wert in Z_{max} und M_2 linear zwischen den Perkolationsgittern interpoliert wurde. Dies ergibt den durch Kreise dargestellten Verlauf, der auch quantitativ die Daten gut reproduziert. Das Maximum des 2.Moments ist im Vergleich zu den Verteilungen bei fester Systemgröße merklich zu höheren Z_{BOUND}/Z_0-Werten verschoben.

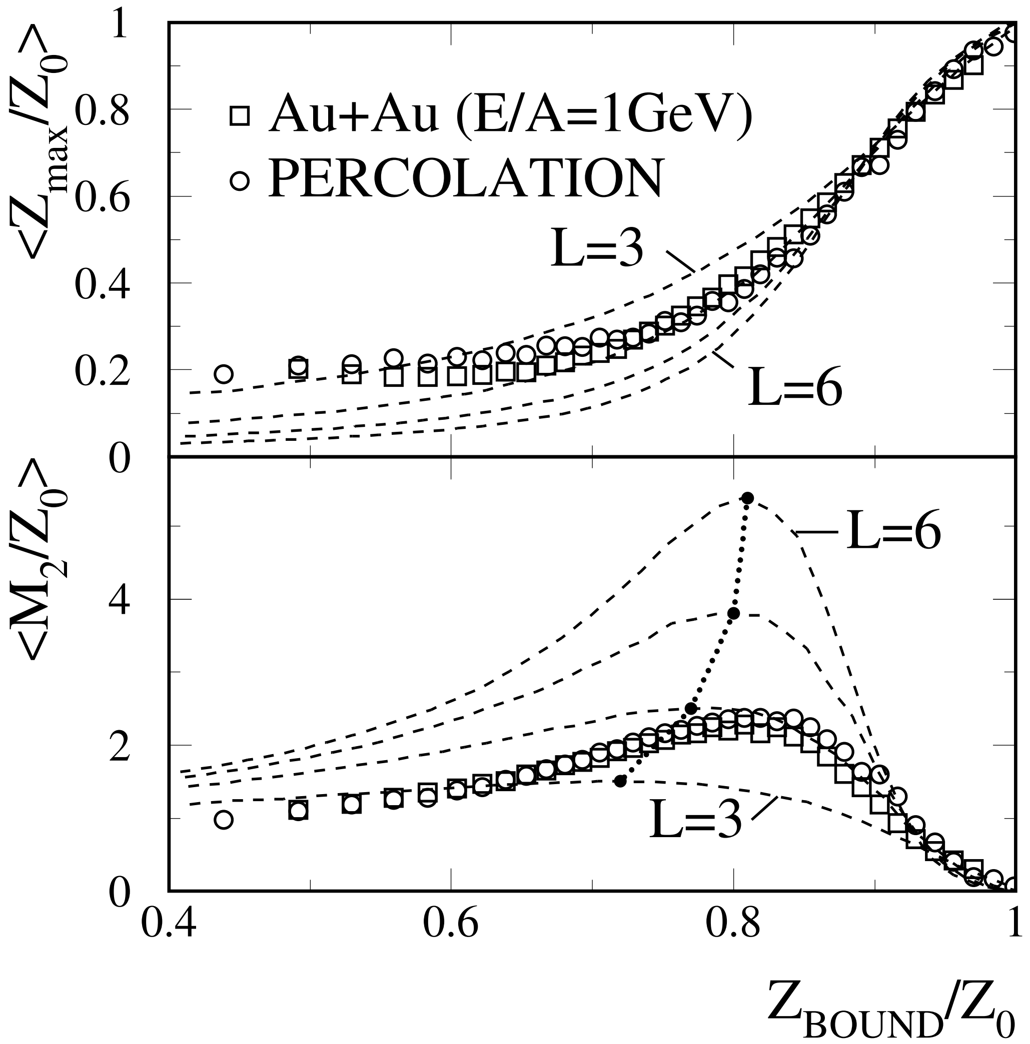

Abbildung 38: Vergleich der gemessenen Verteilungen von Z_{max} und M_2 mit den Perkolations-Rechnungen. Die gestrichelten Linien geben den Verlauf der Perkolationsrechnung bei fester Systemgröße für die Gitter der Größe L=3,4,5 und 6 wieder. Die Positionen der Maxima in der M_2-Verteilung sind durch die gepunktete Linie verbunden. Die Quadrate zeigen die in der Reaktion Au+Au bei E/A=1GeV gemessene Verteilung. Die Berücksichtigung der in den Daten vorhandene Variation der Systemgröße im Perkolationsmodell, führt zu der durch Kreise dargestellten Verteilung.

5.1.2 Der Exponent γ im Perkolationsmodell

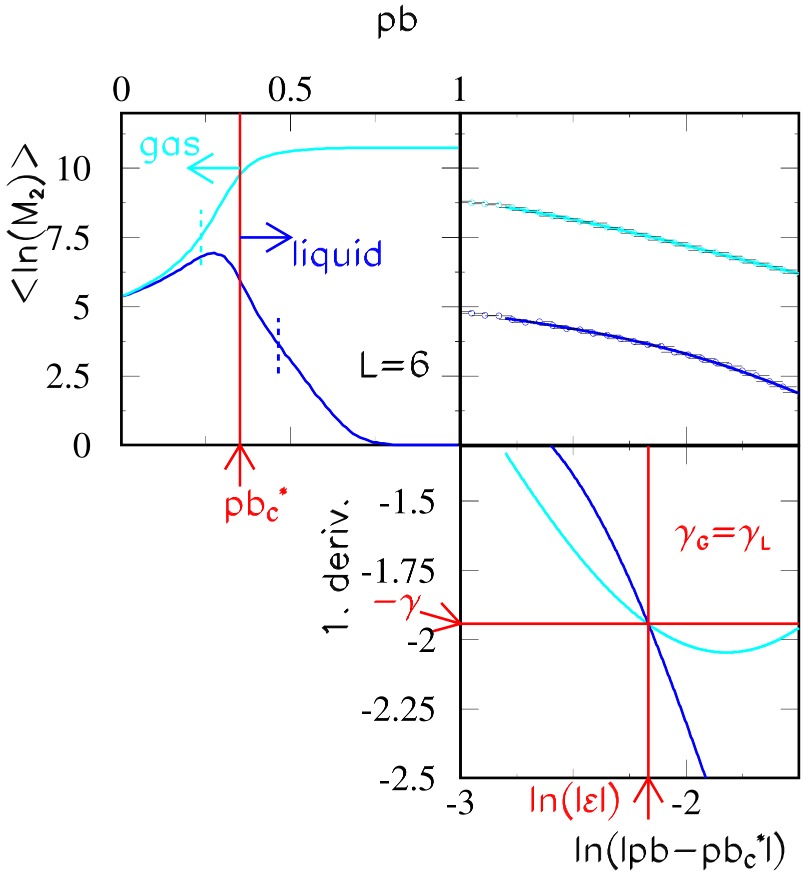

Abbildung 39: Beispiel der Methode zur Bestimmung des Exponenten γ für das L=6 Gitter. Die kritische Versuchswahrscheinlichkeit pb_C^* ist so gewählt, daß der resultierende Wert für γ annähernd mit dem korrekten Wert für den kritischen Exponenten γ=1.8 übereinstimmt.

Die Methode zur Bestimmung des kritischen Exponenten γ ist in Abbildung 39 gezeigt. Für einen Versuchswert pb_C^* der kritischen Bondwahrscheinlichkeit trägt man den Mittelwert des zweiten Moments gegen die Entfernung vom Versuchswert $\epsilon = pb - pb_C^*$ doppeltlogarithmisch auf. In der Flüssigphase ($pb > pb_C^*$) ist dabei das schwerste Cluster bei der Berechnung des Momentes ausgenommen, in der Gasphase wird über alle Cluster summiert. An die Verteilungen werden geeignete Funktion, die den Kurvenverlauf gut wiedergeben, angepaßt und numerisch differenziert. Wegen der zusätzlichen Bedingung $\gamma_{gas} = \gamma_{liquid}$

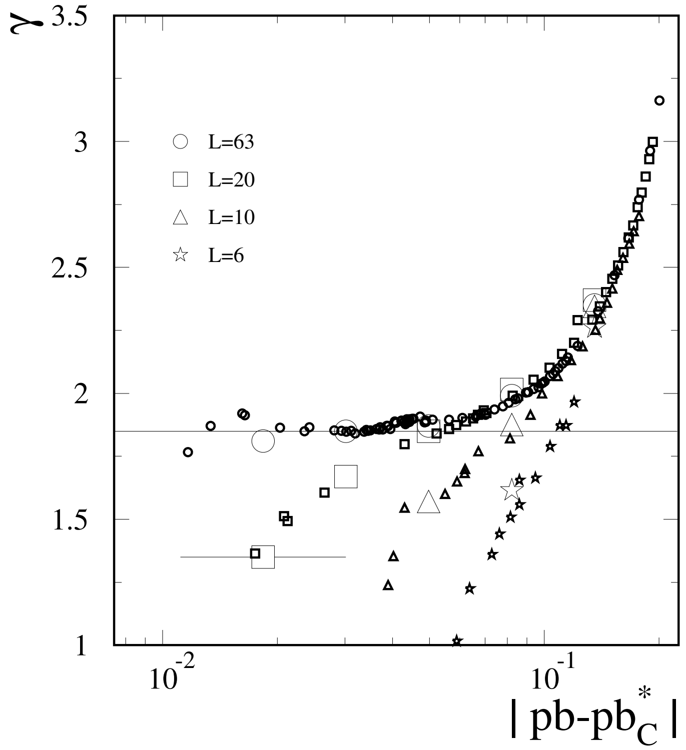

Abbildung 40: Gezeigt sind die bei verschiedenen Veruchswerten pb_C^* der kritischen Bond-Wahrscheinlichkeit erhaltenen Wertepaare (γ, ϵ) für Gitter der Größe L=63,20,10 und 6. Die kleinen Symbole sind die Werte aus der in Abb. 39 beschriebenen Methode. Die großen Symbole wurden mit der auch auf die Daten anwendbaren Methode (siehe Text) gewonnen. Die Größe des ϵ-Bereiches betrug dabei $\Delta ln(\epsilon) = 1$, er ist der übersichtlichkeit halber nur für einen Datenpunkt eingezeichnet. Der korrekte Wert für das unendliche Gitter ist $\gamma = 1.8$, er ist durch die waagrechte Linie markiert.

sucht man nun nach einem Schnittpunkt beider Ableitungen. Aus ihm erhält man einen Wert für γ und einen für die Entfernung ϵ, in der beide Steigungen übereinstimmen. Für jeden Versuchswert pb_C^* erhält man so mit der Bedingung $\gamma_{gas} = \gamma_{liquid}$ einen Wert für γ und ϵ. Die so erhaltenen Wertepaare (γ,ϵ) für Gitter der Größe L=63,20,10 und 6 sind in Abbildung 40 dargestellt.

Die oben beschriebene Methode ist natürlich nur auf Systeme anwendbar, für die, wie bei den Perkolationsrechnungen, der statistische Fehler in der Bestimmung der Momentverteilung beliebig klein gemacht werden kann. Bei begrenzter Statistik, wie etwa bei den Daten, wird man anders verfahren und sich einen festen ϵ-Bereich $ln(\epsilon) \in [\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$

vorgeben und dann den Versuchswert pb^*_C solange variieren, bis die Steigungen der Anpassungsgeraden in dem gewählten Bereich übereinstimmen. Diese Methode liefert identische Ergebnisse, sie sind in Abbildung 40 als große Symbole eingezeichnet.

Im Bereich sehr großer Abstände von der kritischen Wahrscheinlichkeit erhält man zu große Werte für γ. Bei zu großem Abstand vom kritischen Punkt erwartet man auch für ein unendliches System Abweichungen, da das kritische Verhalten nur in einer beschränkten Umgebung um den kritischen Punkt zu beobachten ist. Da in diesem Bereich die Fluktuationen klein gegenüber den Mittelwerten der Observablen sind, kann er mit Mean-Field-Theorien beschrieben werden und wird auch Mean-Field-Bereich genannt. Bei zu kleinen Abständen kommt es ebenfalls zu Abweichungen aufgrund der Abrundungseffekte des Peaks für endliche Systemgrößen. D.h. es gibt sowohl eine untere Schranke aufgrund der finite-size-Effekte als auch eine obere Schranke, die durch den beschränkten kritischen Bereich um den kritischen Punkt definiert wird.

Für große Systeme (L=63) ergibt sich dazwischen ein Bereich, in dem der resultierende Wert für γ konstant ist und dem Wert für ein unendliches System entspricht. Der Wert für γ dieses Plateau kann als Messung des kritischen Exponenten γ dienen, die Ausdehnung als eine Messung des Bereiches, in dem sich kritisches Verhalten zeigt. Je kleiner die Systemgröße, desto weiter verschiebt sich die untere finite-size-Grenze zu größeren Abständen, während für große Abstände die Datenpunkte noch aufeinander fallen. Die beiden Grenzen treffen für Systeme mit $L \approx 20$ aufeinander. Für kleine Systeme existiert kein solches Plateau. Hier bedarf es einer zusätzlichen Bedingung, die den Bereich in ϵ festlegt, aus dem der kritische Exponent zu bestimmen ist.

Betrachtet man beispielsweise die Fluktuationen des 2. Moments, die im mittleren Teil der Abbildung 41 in Form des RMS[2]-Wertes dividiert durch den Mittelwert der Verteilung des 2. Moments dargestellt ist. Für ein unendliches System divergiert diese Größe ebenfalls am kritischen Punkt. Für endliche System erhält man auch hier anstelle der Divergenz ein Maximum, Bereiche zwischen den Maxima für den Gas-Bereich (helle Kurve) und den Flüssig-Bereich (dunkle Kurve) sind sicherlich durch finite-size Effekte stark beeinflußt. Schließt man diesen Bereich für die Bestimmung der Steigung aus (pb_+,pb_-) und nimmt als obere Grenze für die Bestimmung im Flüssig-Bereich die Bond-Wahrscheinlichkeit, in der das mittlere 2. Moment auf etwa 5% des Maximal-Wertes abgefallen ist, so läßt

---

[2] Root Mean Square

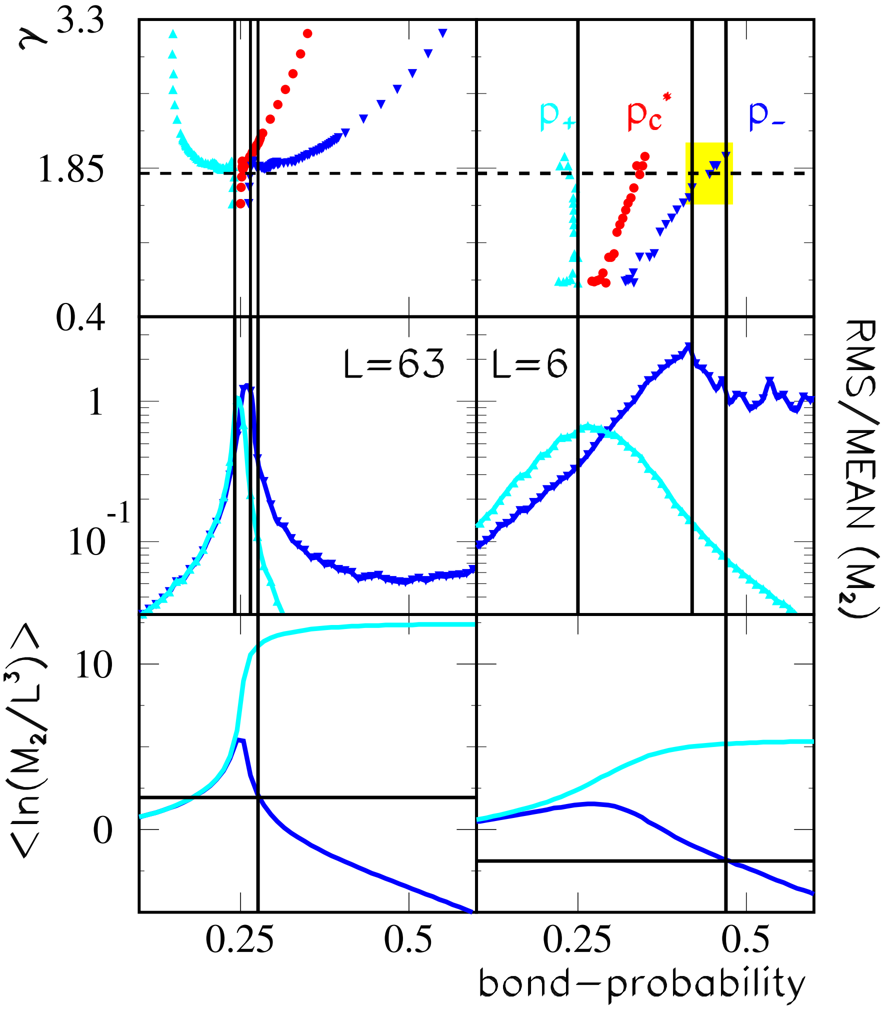

Abbildung 41: Es sind in Abhängigkeit von der Bond-Wahrscheinlichkeit die Verteilung des 2. Moments (dunkle Kurve:ohne größtes Cluster für den Flüssigbereich, helle Kurve:alle Cluster für den Gas-Bereich) in der unteren Abbildung, die Fluktuationen des 2.Moments in Form des Quotienten aus RMS und Mittelwertes der Verteilung in der mittleren Abbildung und der Exponent γ in der oberen Abbildung für das L=63 und das L=6 Gitter gezeigt. p_C^* gibt dabei den Versuchswert für die kritische Bond-Wahrscheinlichkeit, p_+ und p_- den Punk der tatsächlichen Steigungsbestimmung im Gas- bzw. Flüssig-Bereich an.

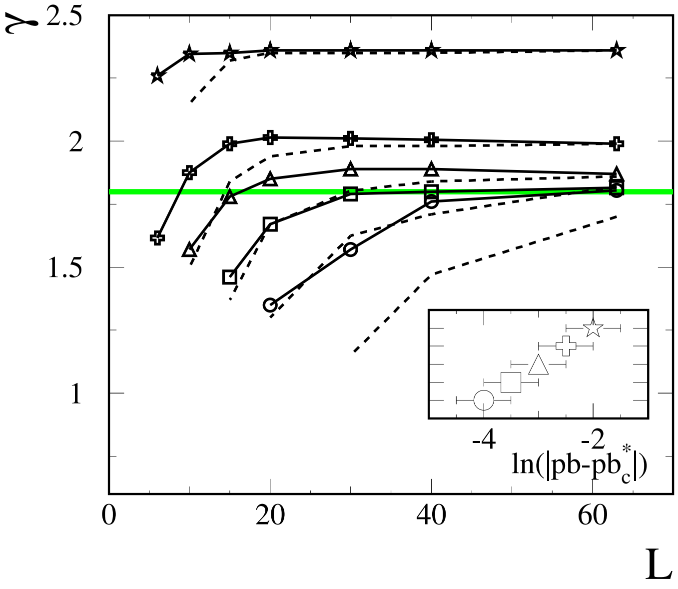

Abbildung 42: Die für verschiedenen ϵ-Bereiche (kleines Bild) erhaltenen Werte für γ als Funktion der Systemgröße L. Die durchgezogenen Linien geben den Verlauf wieder, bei der bei Berchnung des 2.Moments das größte Cluster mit Berücksichtigt wurde, die gestrichelte Linie den Verlauf, bei dem das größte Cluster auf beiden Seiten weggelassen wurde. Der Wert für den kritischen Exponenten γ ist als graue Linie eingezeichnet.

sich damit in der Tat ein Bereich selektieren, aus dem auch für kleine Gitter-Größen ein annähernd korrekter Wert für γ resultiert.

Abbildung 40 läßt allerdings auch eine andere Interpretation zu. Dazu sind die Resultate nochmals in anderer Darstellung in Abbildung 42 gezeigt. Für verschiedene ϵ-Bereiche ist hier der resultierende Wert für γ in Abhängigkeit der Systmgröße L dargestellt. Bei einem festen ϵ-Bereich bleibt der für γ erhaltene Wert bei Verringerung der Systemgröße zunächst konstant, bis er durch finite-size-Effekte zu kleineren Werten verschoben wird. Je kleiner dieser Bereich ist, desto früher geschieht dies. Die gestrichelten Linien geben die aus der Methode resultierenden Werte wieder, wenn das schwerste Fragment in beiden Bereichen von der Summe zur Berechnung des 2.Moments ausgenommen wird. Hier beginnen die finite-size-Effekte schon bei deutlich größeren Systemen die resultierenden Werte für γ zu beeinflußen. Die Hinzunahme des schwersten Fragments auf der Gasseite [Elli 94] bei der Berechnung der Momente stellt also eine Verbesserung der Standardmethode [Stau 91] dar.

Für alle Bereiche, die bei großen Gittern einen annähernd korrekten Wert für γ ergeben, erhält man bei einem System der Größe L=6 einen zu kleinen Wert. In einem Bereich, der für das L=6 Gitter ungefähr den richtigen Wert liefert, erhält man für große Gitter einen zu großen Wert für γ. Möglicherweise ist für kleine Systeme der gesamte Bereich, in dem sich kritisches Verhalten der Verteilung des 2.Moments vorfinden läßt, schon so durch finite-size-Effekte gestört, als daß sich der kritische Exponent γ dort bestimmen ließe. Das Auftreten eines Bereiches, der den korrekten Wert für γ ergibt, wäre nur aufgrund der Randbedingungen gegeben, daß die weitab vom kritischen Punkt extrahierten zu großen Werte für γ durch die finite-size-Effekte auf den Wert des kritischen Exponenten reduziert werden.

5.1.3 Der Exponent β im Perkolationsmodell

Bei der Bestimmung des Exponenten β geht man analog der Methode zur Bestimmung von γ vor, sie ist in Abbildung 43 skizziert. Für einen Versuchswert pb_C^* trägt man den Mittelwert des größten Clusters gegen die Abweichung vom Versuchswert in der Flüssig-Phase doppeltlogarithmisch auf. Einer der Verteilung im interessierenden Bereich angepaßte Fitfunktion wird numerisch differenziert. Entgegen der γ-Bestimmung gibt es hier keine weitere Bedingung, so daß man für jeden Versuchswert pb_C^* β als Funktion des Abstandes ϵ : $\beta = \beta(\epsilon)$ erhält. Die für beide Bestimmungen herangezogenen Größen sind nicht unabhängig, vielmehr ist S_{max} nichts anderes als $1 - M_1$, somit sind beide Größen nur unterschiedliche Momente ein und derselben Clusterverteilung. Deshalb erwartet man, daß die Verteilung von S_{max} im gleichen Bereich das richtige Verhalten zeigen sollte, wie die M_2-Verteilung zur Bestimmung von γ. Deshalb wurde der Wert für β in der gleichen Entfernung ϵ ermittelt, bei der für das gleiche pb_C^* die Steigungen bei der γ-Bestimmung übereinstimmten.

5.1.4 Das Exponentenpaar (γ,β) im Perkolationsmodell

Die in der gleichen Entfernung ϵ ermittelten Werte-Paare (γ,β) sind in Abbildung 44 (linke Seite) für die Gitter der Größe L=63,20,10 und 6 dargestellt.

Für große Gitter (L>20) existiert eine angenommene kritische Bondwahrscheinlichkeit pb_C^*, so daß die extrahierten Werte für γ und β den kritischen Exponenten $\gamma = 1.8$ und $\beta = 0.41$ für das Perkolationsmodell entsprechen. Für kleinere Gitter läßt sich kein

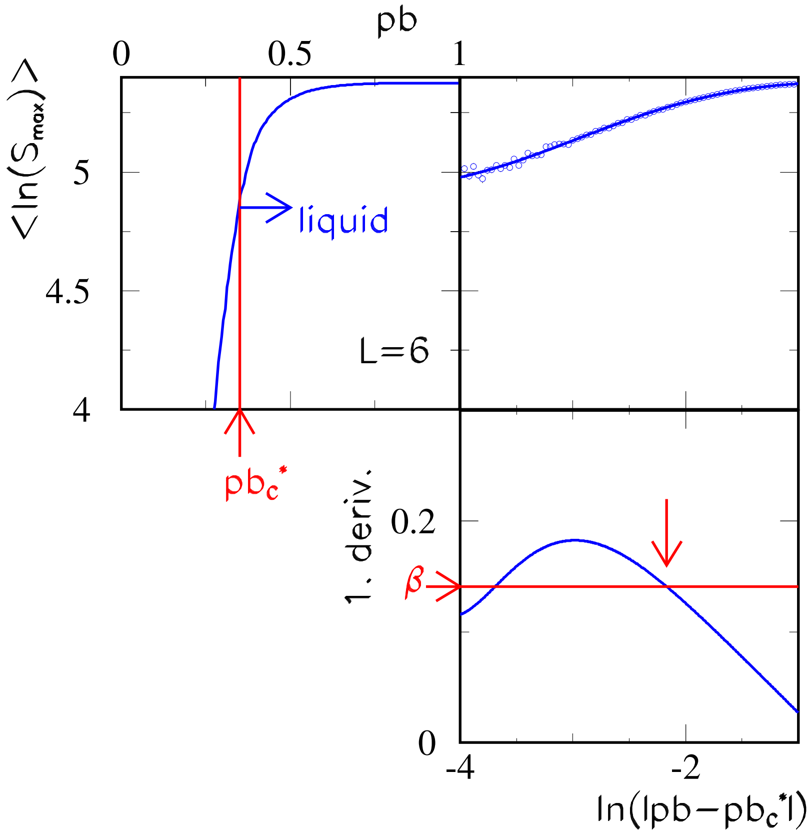

Abbildung 43: Beispiel zur Methode zur Bestimmung des Exponenten β für das L=6 Gitter. pb_C^* ist identisch mit Abbildung 39 gewählt. Der volle Pfeil markiert die Stelle bei der die beiden Steigungen der γ-Bestimmung übereinstimmen. Der punktierte Pfeil markiert die Stelle des Maximums.

solches pb_C^* finden, bei der die Methoden simultan für γ und β korrekte Werte liefern würde. Für das L=6 Gitter erhält man für einem Wert von pb_C^*, bei dem die Methode zur Bestimmung von γ annähernd den korrekten Wert liefert, immer einen deutlich zu kleinen Wert (< 0.2) für β, unabhängig davon, in welcher ϵ-Entfernung der Parameter bestimmt wurde (Abb. 43).

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Resultate von der speziellen Wahl des Kontrollparameters wurde obige Analyse auch für die Observable S_{BOUND} durchgeführt, die äquivalent dem in den Daten zur Klassifizierung benutzten Z_{BOUND} definiert ist. Die Ergebinsse sind in Abbildung 44 (rechts) dargestellt. Solange eine lineare Abhängigkeit zwischen den

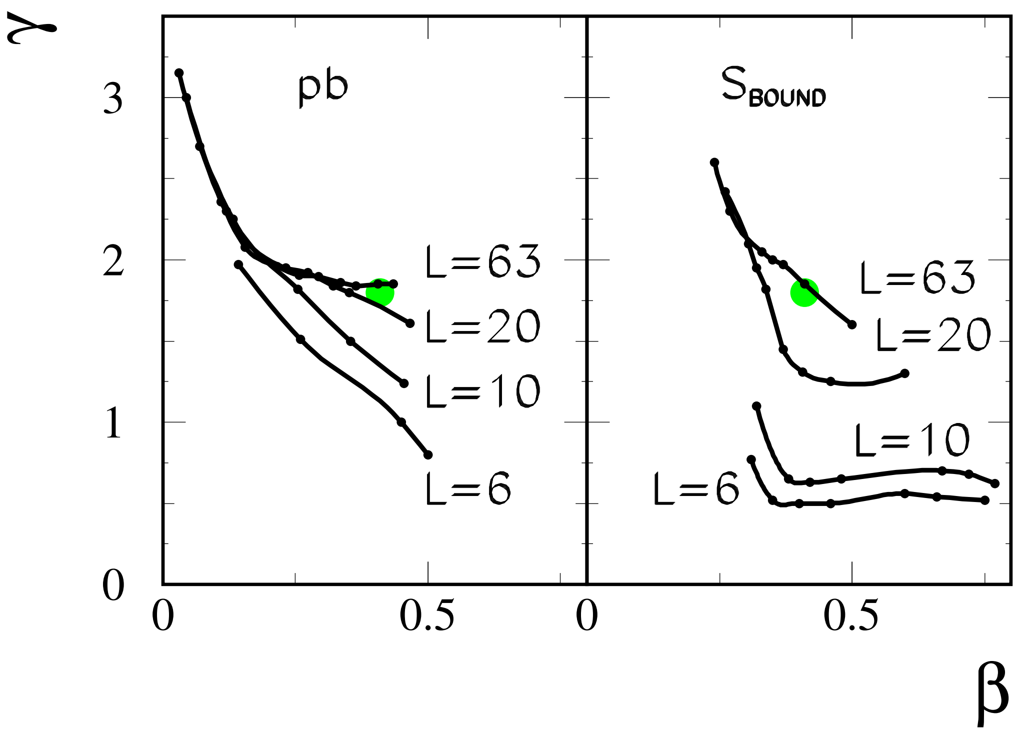

Abbildung 44: Die in der gleichen Entfernung ϵ ermittelten Wertepaare (γ,β) für die L=63,20,10 und 6 Gitter. Die korrekten Kombination für das unendliche System ist als dicker Punkt eingezeichnet. Links sind die Ergebnisse bei Verwendung des "wahren" Kontrollparameters Bondwahrscheinlichkeit pb, rechts die bei Verwendung von S_{BOUND} als Kontrollparameter gezeigt.

Kontrollparametern besteht, bleiben die Resultate unverändert. So existiert für das für das L=63 Gitter auch hier ein kritischer Versuchswert für den Kontrollparameter, so daß die Methode die Werte der kritischen Exponenten wiedergibt. Für kleine Systemgrößen verändern die in der Beziehung von S_{BOUND} und der Bondwahrscheinlichkeit vorhandenen Nichtlinearitäten (Abb. 34) die Ergebnisse. Die Stauchung des Flüssig-Bereiches beim Übergang zu S_{BOUND} führt dazu, daß man im Allgemeinen für β größere Werte erhält. Bei kleinen Systemgrößen ist bei dieser Methode also zudem eine starke Abhängigkeit vom speziell verwendeten Kontrollparameter zu verzeichnen.

5.1.5 Anwendung der Methode auf die Daten

Bei der Anwendung der Methode auf die Daten müssen die systematischen Unsicherheiten in der Abtrennung der Spaltereignisse und der Normierung der Momente berücksichtigt werden. Da für das symmetrische System Au+Au die Systemgröße als Funktion von Z_{BOUND} bestimmt wurde, lassen sich für dieses System die Momente auf die Zahl der Wasserstoffisotope korrigieren und auf die Systemgröße normieren. Die Ergebnisse der Analyse für dieses System sind in Abbildung 45 dargestellt. Die Unsicherheit bei der Abtrennung der Spaltereignisse ist durch die verschiedenen Symbole ausgedrückt. Die offenen Symbole stellen die Resultate dar, bei denen die H-Isotope in der Berechnung des 2.Moments nicht berücksichtigt wurden. Korrigiert man das 2.Moment auf die H-Isotopenzahl, so erhält man die durch die grauen Symbole dargestellten Wertepaare. Normiert man zudem auf die Systemgröße Z_0, so ergeben sich die schwarzen Symbole. Wie im Perkolationsmodell bei Verwendung von S_{BOUND} als Kontrollparameter erhält man auch hier große Werte für β. Das Weglassen der H-Isotope in der Berechnung der Momente hat nur einen geringen Einfluß auf die Ergebnisse. Die Normierung auf die Systemgröße bewirkt ein Saturieren des Wertes für γ knapp unter eins für den Bereich $\beta > 0.5$. Ohne Normierung steigt γ sonst weiter an.

Die Ergebnisse für das System U+Au unter Verwendung des unkorrigierten zweiten Moments sind in Abbildung 46 dargestellt. Die Resultate sind im wesentlichen identisch mit den aus der Fragmentation des Goldkerns gewonnen, jedoch führen die größeren Unsicherheiten in der Abtrennung der Spaltereignisse und die schlechtere Statistik im Bereich großer Z_{BOUND}-Werte (s.Kap. 3.2) zu größeren systematischen und statistischen Fehlern.

In den Abbildungen sind weiterhin das Ergebnis der Analyse der EOS-Kollaboration [Gilk 94] und die Paare der kritischen Exponenten für Mean-Field-Theorien (MF), Flüssig-Gas- (LG), paramagnetisch-ferromagnetisch (M) und Perkolation (P) eingetragen. Der Punkt für den magnetischen Übergang wurde hinzugenommen, um eine Abschätzung der Varianz der Wertepaare für physikalische Systeme zu vermitteln.

Das EOS-Resultat weicht von den Wertepaaren, die bei der Analyse der ALADIN-Daten erhalten wurden, ab. Die für die Analyse verwendeten Daten unterscheiden sich in drei Punkten: Zum ersten wurde in der EOS-Analyse statt dem symmetrischen System Au+Au das System Au+C verwendet. Die Target-Systematik ist für die Systeme von Au auf C,Al und Au in Abbildung 47 dargestellt. Die Universalität der Projektilfragmentation zeigt

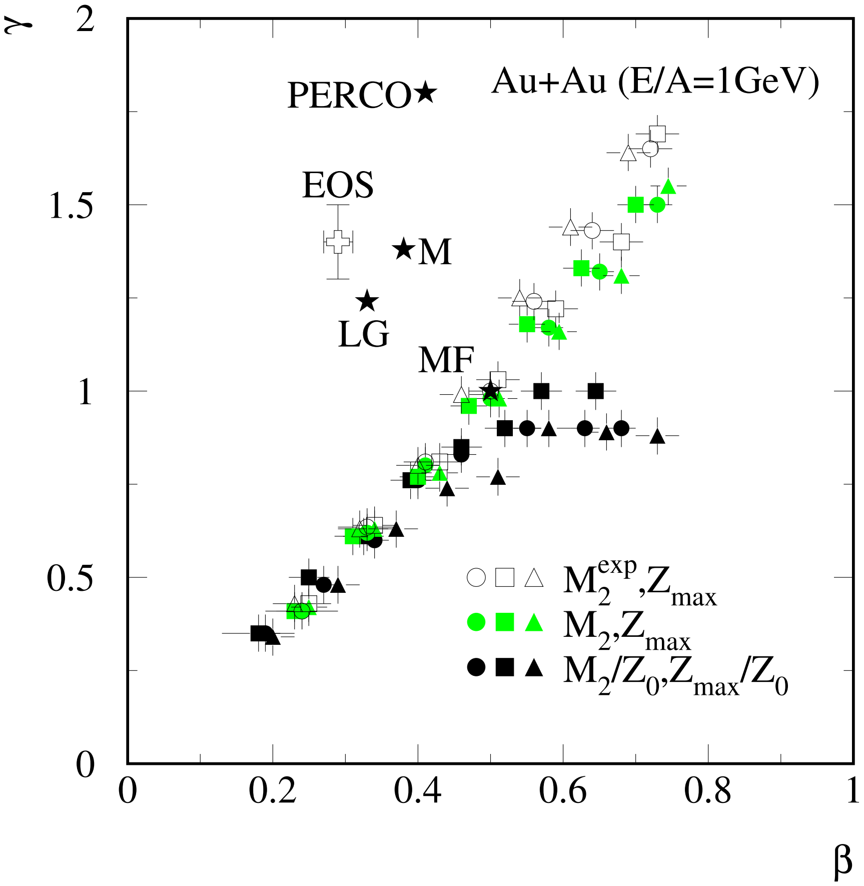

Abbildung 45: Die unter Verwendung von Z_{BOUND} als Kontrollparameter extrahierten Wertepaare für die Fragmentation von Au+Au. Die verschiedenen Symbole geben die Werte für die drei unterschiedlichen Bedingungen zur Abtrennung der Spaltereignisse wieder (Kapitel 3.2). Die verschiedenen Graustufen zeigen die Resultate für verschiedene Normalisierungen der Momente. Die offenen Symbole stellen die Resultate dar, bei denen die H-Isotope in der Berechnung des 2.Moments nicht berücksichtigt wurden. Korrigiert man das 2.Moment auf die H-Isotopenzahl, so erhält man die durch die grauen Symbole dargestellten Wertepaare. Normiert man Z_{max} und M_2 zudem auf die Systemgröße Z_0, so ergeben sich Wertepaare, dargestellt durch die schwarzen Symbole. Desweiteren sind der von der EOS-Kollaboration extrahierte Wert [Gilk 94] und die Wertepaare der kritischen Exponenten für den Flüssig-Gas-Phasenübergang (LG), den Phasenübergang bei Ferromagneten (M) und des Perkolationsmodell (PERCO), sowie das aus Mean-Field-Theorien (MF) resultierende Wertepaar eingezeichnet.

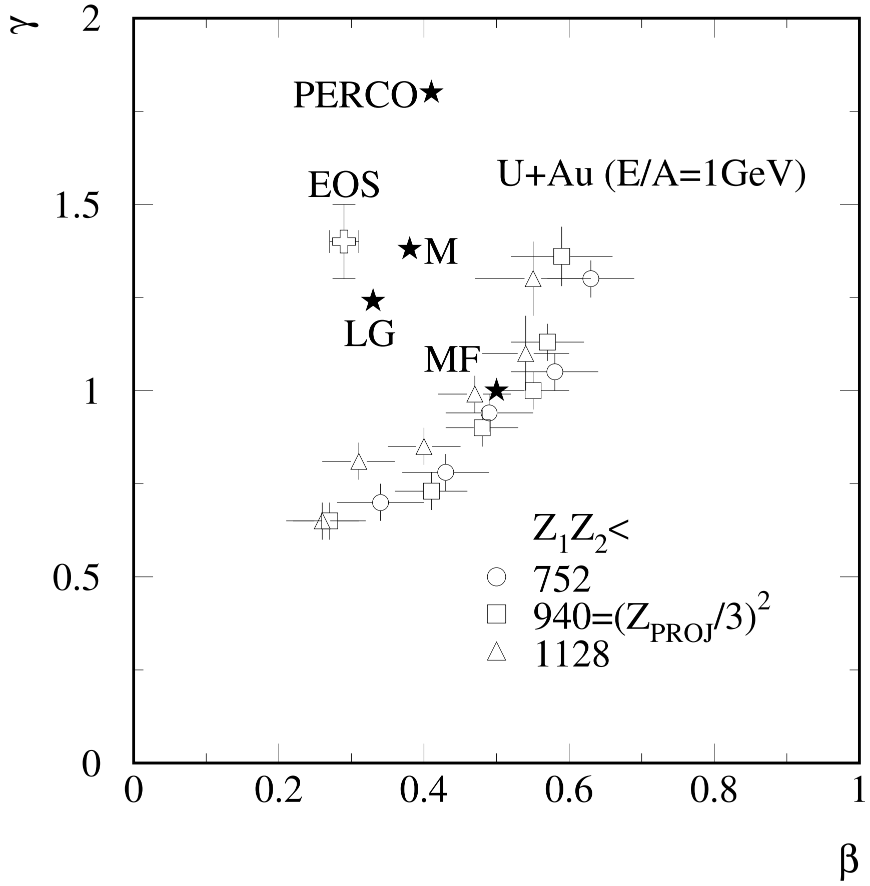

Abbildung 46: Die unter Verwendung von Z_{BOUND} als Kontrollparameter extrahierten Wertepaare für die Fragmentation von U+Au. Dargestellt sind die Resultate, bei denen die H-Isotope in der Berechnung des 2.Moments nicht berücksichtigt wurden. Die unterschiedlichen Symbole zeigen die Resultate unter den verschiedene Bedingungen an das Produkt der zwei schwersten Fragmentladungen zur Abtrennung der Spaltereignisse.

sich auch in dieser Analyse. Die erhaltenen Ergebnisse hängen nicht von der Wahl des Targets ab. Erst wenn für die Bestimmung von γ in der Gas-Phase (kleines Z_{BOUND}) beim Kohlenstofftarget Bereiche im Ausläufer ($Z_{BOUND} < 40$) der Z_{BOUND}-Verteilung (s.Abb. 17) hinzugezogen werden, kommt es zu Abweichungen von dem universellen Verhalten. Diese Abweichungen können den Unterschied zwischen den Ergebnissen der EOS-Kollaboration und dieser Analyse aber nicht erklären, ja sie gehen sogar in die entgegengesetzte Richtung.

Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß in der EOS-Analyse gefordert wurde, daß die

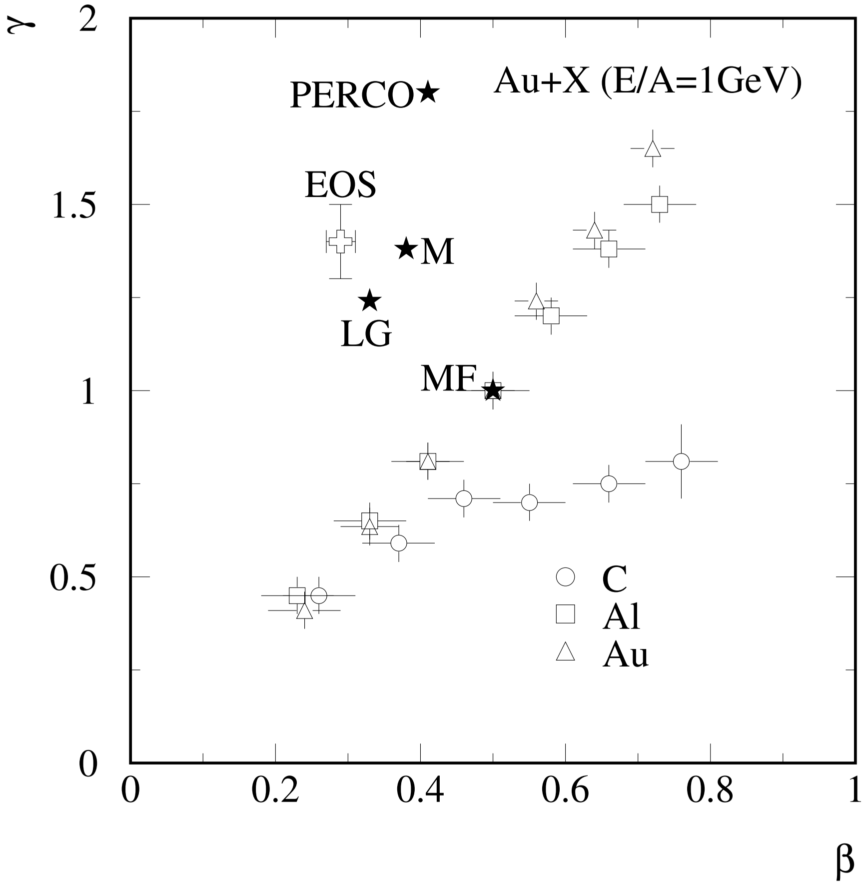

Abbildung 47: Die unter Verwendung von Z_{BOUND} als Kontrollparameter extrahierten Wertepaare für die Reaktion von Au mit C,Al und Au als Target. Die Symbole stellen die Resultate dar, bei denen die H-Isotope in der Berechnung des 2.Moments nicht berücksichtigt wurden. Für die letzten drei Datenpunkte befindet sich der Bereich zur Bestimmung von γ in der Gasphase teilweise, bzw. ganz, in dem Ausläufer der Z_{BOUND}-Verteilung, in dem auch in anderen Verteilungen eine Abweichung von der Universalität beobachtet wird [Kunz 95].

Summe der in nachgewiesenen Ladungen um maximal drei Einheiten von der Projektilladung abweicht. Dadurch wird die Größe des untersuchten Systems konstant gehalten. Die für die Analyse verwendeten Teilchen entstammen dann aber nicht nur der Projektilquelle, sondern teilweise auch der intermediären Quelle. In der vorliegenden Analyse wurden zur Berechnung der verschiedenen Observablen jedoch nur die Fragmente der Projektilquelle berücksichtigt. Dadurch ergibt sich aber zwangsläufig eine Systemgrößen-

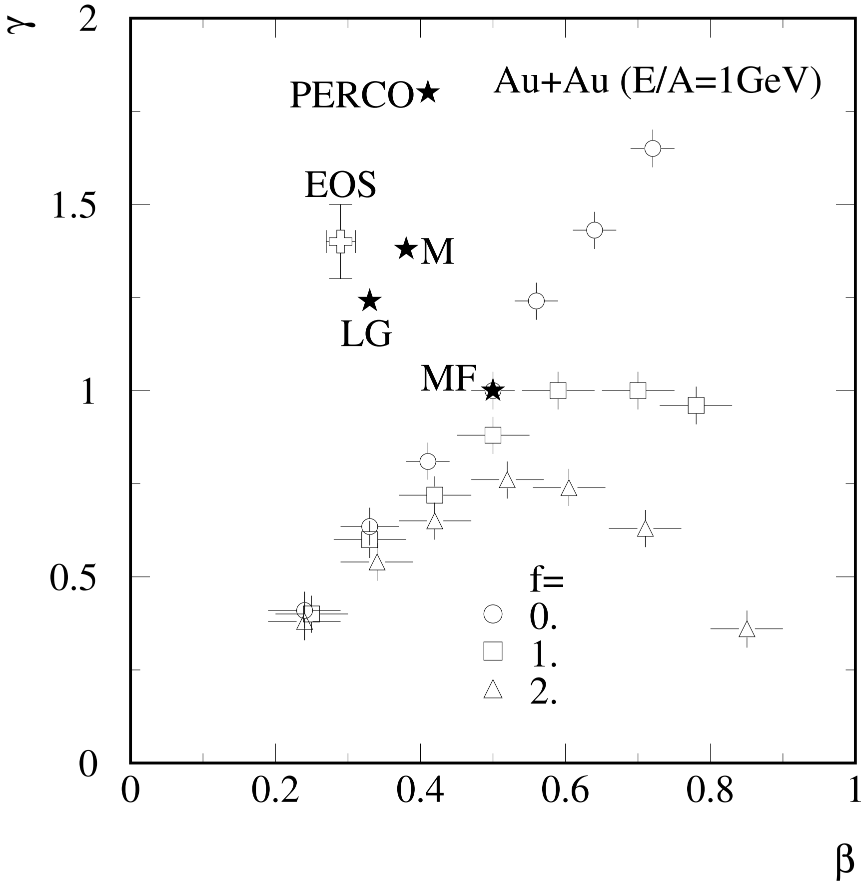

Abbildung 48: Die unter Verwendung von Z_{BOUND} als Kontrollparameter extrahierten Wertepaare für die Fragmentation von Au+Au. Die Kreise stellen die Resultate dar, bei denen die H-Isotope in der Berechnung des 2.Moments nicht berücksichtigt wurden. Bei den Quadraten wurden die nicht nachgewiesenen Projektilladungen Z_{PROJ}-Z_{BOUND} als H-Isotope (f=1), bei den Dreiecken als He-Isotope (f=2) bei der Berechnung der Momente mit hinzugenommen. Dadurch wird die Systemgröße auf dem konstanten Wert der Projektilladung gehalten.

variation abhängig vom Kontrollparamter, also der Zentralität, des Ereignisses. Aufgrund der nicht vollständigen Akzeptanz und Effizienz des ALADIN-Spektrometers bezüglich der intermediären Quelle ist es nicht möglich die Analyse unter den Bedingungen der EOS-Gruppe zu wiederholen. Um zu untersuchen, ob dieser Effekt für die unterschiedlichen Resultate verantwortlich sein kann, wurden deshalb die nicht nachgewiesenen Ladung Z_{PROJ}-Z_{BOUND} künstlich aufgefüllt. Zu dem gemessenen zweiten Moment M_2^{exp} wurde ein

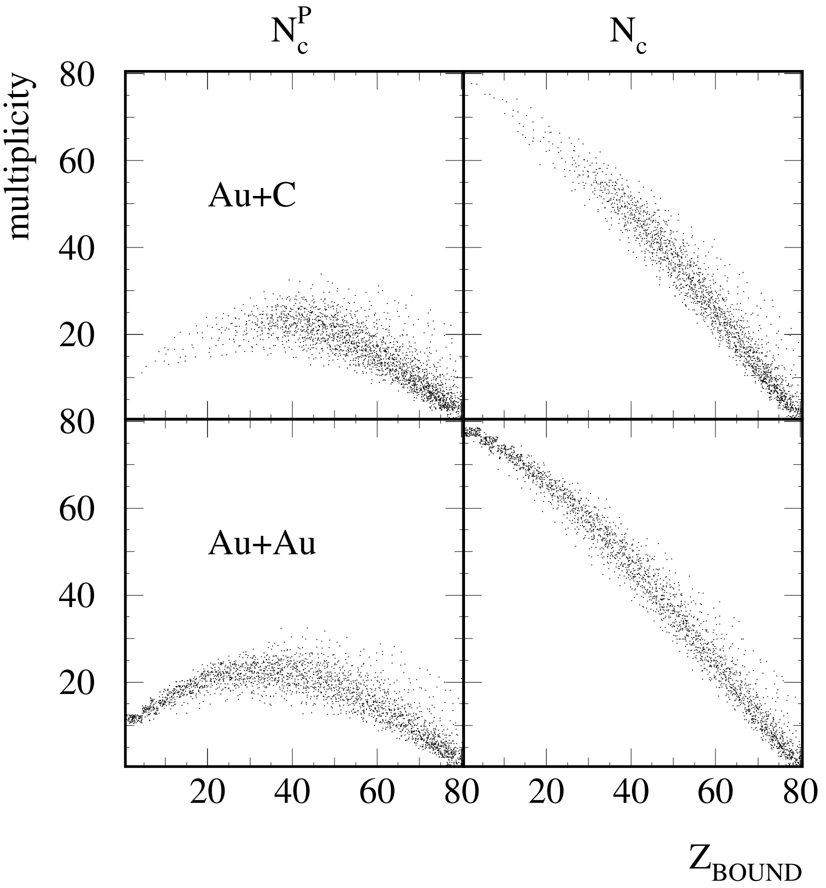

Abbildung 49: Korrelation von Z_{BOUND} und der Multiplizität geladener Teilchen für die Reaktionen Au+C und Au+Au bei E/A=1GeV. Bei der Berechnung der Anzahl geladener Teilchen der Projektilquelle N_c^P wurden die aus der Systemgröße Z_0 rekonstruierte Anzahl von H-Isotopen mit berücksichtigt. Zur Berechnung der Gesamtmultiplizität N_c wurde die Systemgröße als konstant der Projektilladung angenommen, sie stellt daher für die Reaktion Au+Au ein sehr fragwürdiges Konstrukt dar. Der nicht nachgewiesene Projektilladung Z_{PROJ}-Z_{BOUND} wird dabei als aus H-Isotopen bestehend angesehen.

Beitrag $M_2^{rest} = f \cdot (Z_{PROJ} - Z_{BOUND})$ hinzuaddiert. Für die Auffüllung mit H-Isotopen ist der Faktor f=1, für eine Auffüllung mit He-Isotopen wäre f=2. Die Systemgröße wird auf diese Weise künstlich auf dem Wert des Projektils konstant gehalten. Die unter Verwendung dieser Verteilungen erhaltenen Ergebnisse sind in Abbildung 48 wiedergegeben. Bei der Auffüllung durch H-Isotope erhält man ein ähnliches Ergebnis, wie bei der Normierung der Momente auf die Systemgröße Z_0 in Abbildung 45, der Wert für γ bleibt im

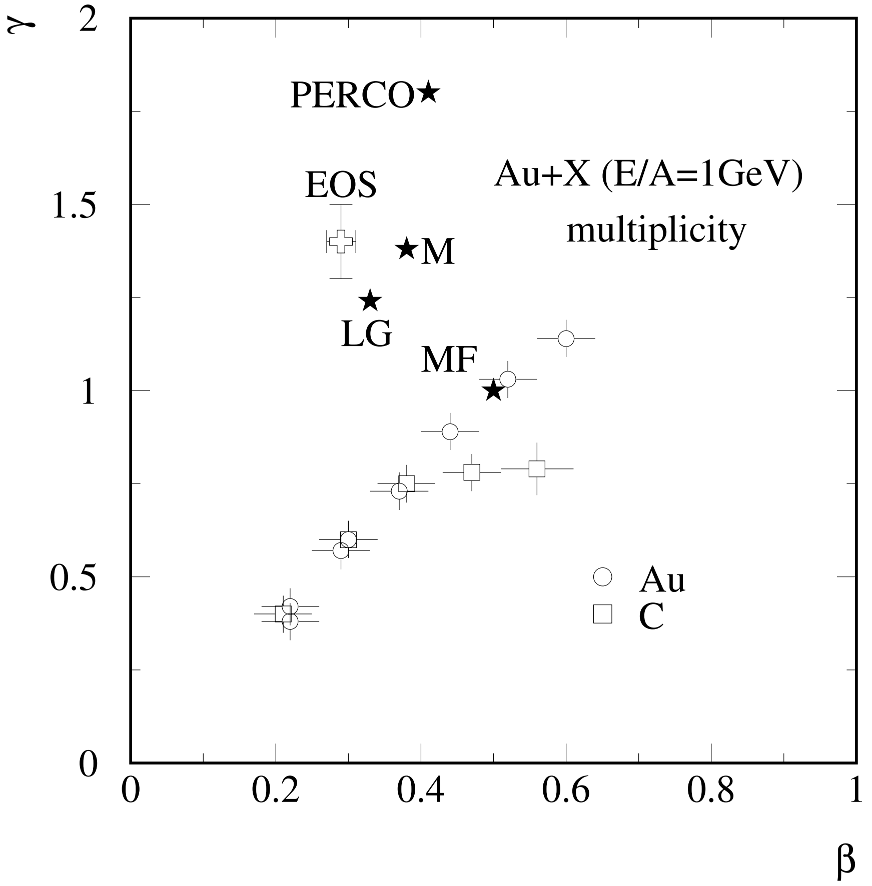

Abbildung 50: Die unter Verwendung der rekonstruierten Multilpizität als Kontrollparameter extrahierten Wertepaare für die Fragmentation von Au+Au und Au+C. Die nicht nachgewiesenen Projektilladungen Z_{PROJ}-Z_{BOUND} wurde als H-Isotope bei der Berechnung der Momente mit hinzugenommen. Die Rekonstruierte Multiplizität ist die Summe aus der Anzahl der nachgewiesenen Fragmente mit $Z \geq 2$ und der H-Isotopenzahl.

Bereich $\beta > 0.5$ konstant. In beiden Fällen führen die Abweichungen aber noch weiter von dem EOS-Resultat weg.

Der dritte Unterschied in der Auswahl der Daten liegt darin, daß statt der Observablen Z_{BOUND} die Multiplizität als Ordnungsparameter verwendet wurde. Unter Voraussetzung einer konstanten Systemgröße von $Z_{sum} = 79$ läßt sich die Gesamtmultiplizität geladener Teilchen N_C aus der gemessenen Multiplizität der Teilchen mit $Z \geq 2$ und der Annahme, daß alle nicht nachgewiesenen Ladungen als H-Isotope vorliegen, rekonstruieren. Die Korrelation der so erhaltenen Multiplizität N_c mit Z_{BOUND} ist im rechten Teil der

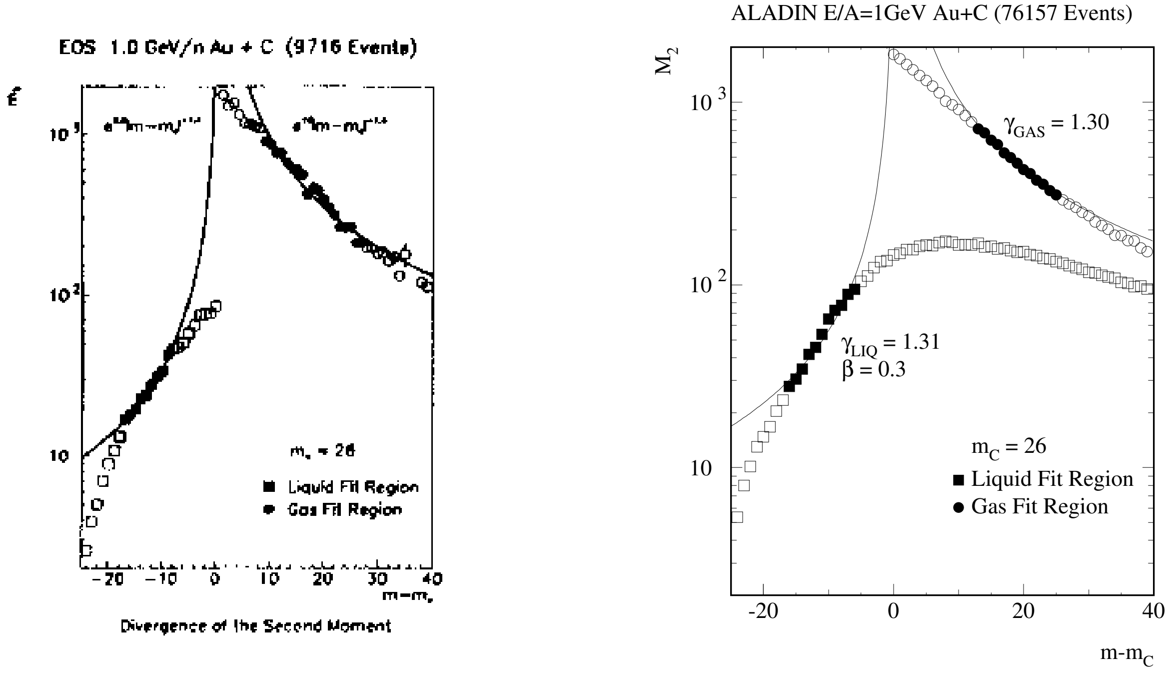

Abbildung 51: Die Verteilungen des 2. Moments berechnet mit dem schwersten Fragment (Kreise) für den Gas-Bereich und ohne dem schwersten Fragment (Quadrate) für den Flüssig-Bereich als Funktion der Abweichung der Multiplizität von ihrem angenommenen kritischen Wert m_C=26 [Gilk 94] für die EOS-Daten [Ritt 88] (links) und die ALADIN-Daten (rechts). Die geschlossenen Symbole kennzeichnen die Intervalle, die zur Bestimmung des kritischen Exponenten γ durch Anpassung eines Potenzgesetzes benutzt wurden.

Abbildung 49 dargestellt. Der nahezu lineare Zusammenhang zwischen N_c und Z_{BOUND} führt dazu, daß die mit N_c als Kontrollparameter bestimmten Exponenten β und γ (siehe Abb. 50) nur geringfügig von den mit Z_{BOUND} als Kontrollparameter bestimmten Exponenten abweichen (siehe Quadrate in Abb. 48). D.h. auch mit N_c als Kontrollparameter kommt man bei der vorliegenden Analyse der ALADIN Daten nicht zu Ergebnissen, die mit der EOS Analyse verträglich sind.

Um der Frage nachzugehen, ob diese Diskrepanz auf unterschiedliche experimentelle Fragmentverteilungen zurückzuführen sind, sind in Abbildung 51 für die Reaktion Au+C bei E/A=1GeV die zweiten Momente als Funktion der Abweichung von der kritischen Multiplizität m_c gegenübergestellt. In beiden Fällen wurde für m_c ein Wert von 26 angenommen [Gilk 94]. Um einen quantitativen Vergleich zu ermöglichen, wurden an die ALADIN Daten in dem von der EOS Kollaboration verwendeten Fitbereich [Ritt 88, Gilk 94] (siehe

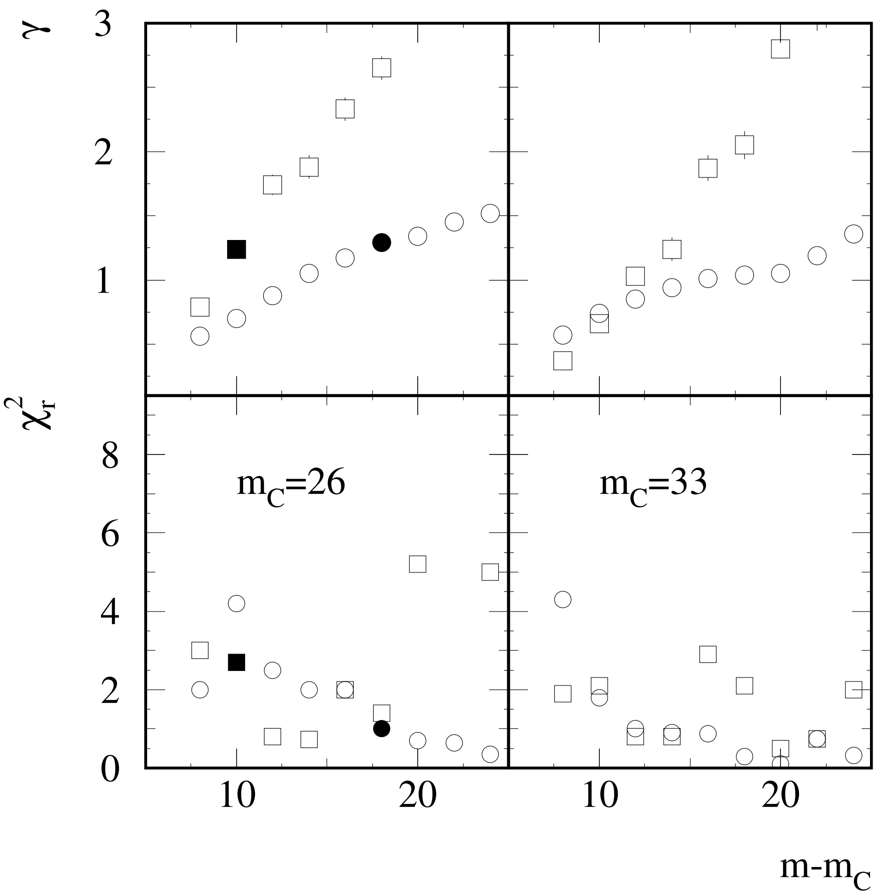

Abbildung 52: Gezeigt sind im oberen Teil die für zwei angenommenen kritische Multiplizitäten (links: m_c=26, rechts: m_c=33) aus den Anpassungen bestimmten Exponenten γ im Gasbereich (Kreise) und Flüssigbereich (Quadrate) als Funktion des mitteleren Abstandes des Fitbereichs von m_c. Die reduzierten χ^2-Werte der Anpassungen sind im unteren Bild dargestellt. Die Schwerpunkte der in der EOS-Analyse verwendeten Fit-Bereiche sind als volle Symbole gekennzeichnet.

geschlossene Symbole) eine Potenzfunktion zur Bestimmung des Exponenten γ angepaßt. In analoger Weise wurde der Exponent β anhand der Verteilung des schwersten Fragments bestimmt. Die so bestimmten Exponenten (γ=1.3, β=0.3) stimmen im Rahmen der Fehler mit den Ergebnissen der EOS-Analyse (γ=1.4±0.1, β=0.29±0.02) überein. Die so erreichte Übereinstimmung im Falle *identischer* Fitbereiche zeigt, daß die zuvor beobachteten Diskrepanzen nicht auf Unterschiede in den experimentellen Fragmentverteilungen zurückzuführen sind.

Abbildung 52 zeigt für zwei kritische Multiplizitäten (links: m_c=26, rechts: m_c=33) die aus den Anpassungen bestimmten Exponenten γ im Gasbereich (Kreise) und Flüssigbereich (Quadrate) als Funktion des mitteleren Abstandes des Fitbereichs von m_c. Es zeigt sich, daß die Bedingung, identische Werte für γ_{GAS} und γ_{LIQUID} zu erhalten, nur γ-Werte oberhalb von etwa 1.5 ausschließt. Die Werte für die von der EOS-Analyse verwendeten Fitbereiche sind durch die geschlossenen Symbole markiert. Sie unterscheiden sich in keiner Eigenschaft offensichtlich von den anderen möglichen Bereichen. In der vorliegenden Arbeit wurde, um die Anzahl der freien Parameter zu reduzieren, in der Analyse verlangt, daß die extrahierten Werte für γ im Gas- und Flüssigbereich in der gleichen Entfernung vom angenommenen kritischen Kontrollparameter übereinstimmen. Wie in Abbildung 51 erkennbar, liegen die Fitbereiche im Gas- und Flüssigbereich nicht symmetrisch um die angenommene kritische Multiplizität m_c verteilt. Dies erklärt, warum bei der zuvor beschriebenen Methode das Resultat der EOS-Kollaboration nicht reproduziert werden konnte.

Obwohl diese beiden Analysevorschriften bei der Anwendung auf experimentelle Fragmentverteilungen zu sehr unterschiedlichen Resultaten führen, muß betont werden, daß - angewendet auf Fragmentverteilungen des Perkolationsmodells - beide Methoden identische Resultate liefern, zumindest solange die Bondwahrscheinlichkeit als Kontrollparameter verwendet wird [Elli 94].[3] Hervorzuheben ist weiterhin, daß es *keine* der beiden Analysevorschriften erlaubt, im Falle kleiner Perkolationsgitter Exponenten β und γ simultan zu finden, die mit den kritischen Exponenten unendlicher Perkolationsgitter übereinstimmen [Elli 94].

Die an die Verteilung angepaßten Potenzfunktionen (siehe Linien in Abb. 51) beschreiben die Daten wenn, dann überhaupt nur im Gasbereich, qualitativ über einen größeren Bereich. Im Flüssigbereich beschreibt die Fitfunktion den funktionalen Verlauf der gemessenen Verteilung nicht, schon die Krümmung stimmt nicht überein, gemessene Verteilung und Fitfunktion berühren sich nur tangential. Es ist daher fraglich, inwieweit der Exponent der Fitfunktion hier eine Eigenschaft der Verteilung beschreiben kann.

Das Versagen dieser Methoden bei der Anwendung auf das Perkolationsmodell für kleine Systeme, die starke Änderung der Resultate bei einem Wechsel von dem korrekten Kontrollparamter auf einen aus der Ladungsverteilung berechneten Kontrollparameter, die

---

[3] Für andere Kontrollparameter liegen keine vergleichbaren Analysen der EOS-Kollaboration vor.

Sensitivität auf zur Analyse notwendigen *ad hoc* Annahmen und die fehlende Wiedergabe des funktionalen Verlaufs der Verteilungen lassen es somit insgesammt unwahrscheinlich erscheinen, daß durch diese Methoden zuverlässige, numerische Werte für die kritischen Exponenten ableitbar sind.

5.2 γ/β aus der Korrelation des 2.Moments und S_{max}

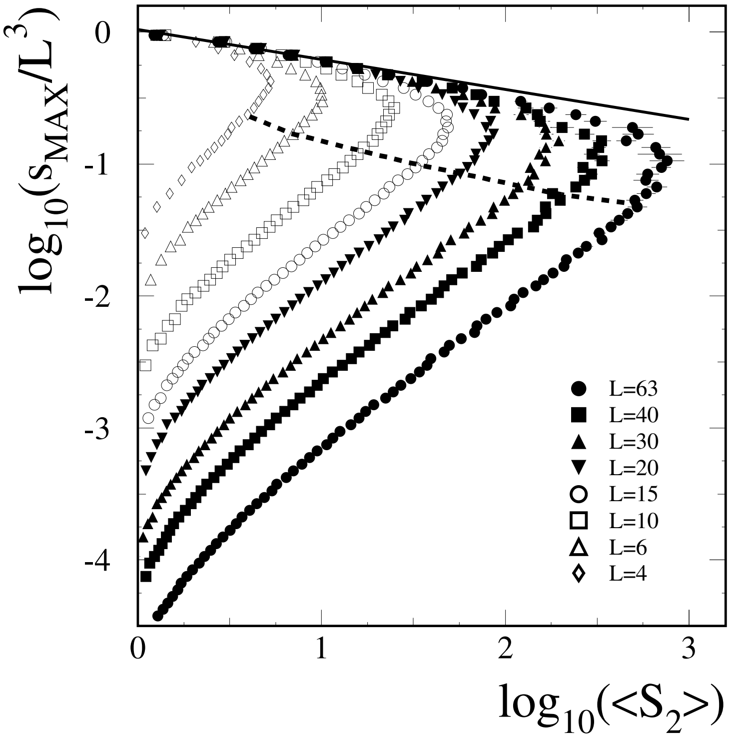

Abbildung 53: Die Korrelation des mittleren, skalierten 2.Momentes $\langle S_2 \rangle$ mit der Größe des schwersten Clusters S_{max} für Gitter der Größe L=4,6,10,15,20,30,40 und 63 im Perkolationsmodell.

Die Abhängigkeit von einer speziellen Wahl eines Kontrollparameters kann umgangen werden, indem man die Korrelation zweier kritisches Verhalten zeigender Größen betrachtet [Camp 88]. Für ein unendlich großes System hängen der Ordnungsparameter P und das skalierte 2.Moment im Flüssig-Bereich ($pb > pb_C$) über $P \propto \epsilon^{\beta}$ und $S_2 \propto \epsilon^{-\gamma}$ vom Kontrollparameter ab. Für die Korrelation der Größe des schwersten Clusters S_{max}, der hier den Ordnungsparameter repräsentiert, und S_2 erwartet man daher ein Verhalten der Form $P \propto S_2^{-\beta/\gamma}$. Sie ist in Abbildung 53 in doppelt logarithmischer Darstellung gezeigt. Man erwartet im Bereich großer S_{max} (oberer Zweig) eine lineare Abhängigkeit mit einer Steigung von $-\beta/\gamma$=-0.23 für das Perkolationsmodell, eine Gerade dieser Steigung ist als durchgezogene Linie eingezeichnet. Für kleine Systeme findet man in diesem Zweig keinen linearen Bereich, die dem Verhältnis der kritischen Exponenten entsprechende Steigung

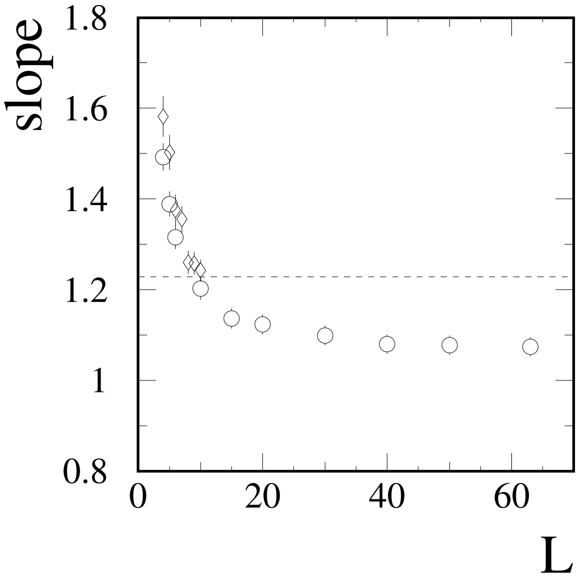

Abbildung 54: Steigung des unteren Zweiges der Korrelation von S_2 und S_{max} im Perkolationsmodell als Funktion der Systemgröße L. Die Werte für die Rauten stammen aus [Jaqa 91].

wird hier höchstens im Grenzfall $S_{max} \rightarrow L^3$ erreicht.

Im Bereich kleiner S_{max} erkennt man ein wesentlich lineareres Verhalten. Eine Beziehung zwischen der Steigung des unteren Astes und den kritischen Exponenten ist nicht offensichtlich, im unendlichen System existiert dieser Zweig nicht, da dort der Ordnungsparamter P im Gas-Bereich ($pb < pb_C$) identisch null ist. Für die Abhängigkeit des größten - endlichen - Clusters $\tilde{s}$ vom Kontrollparameter in der Gasphase wurde die Beziehung $\tilde{s} \propto |\epsilon|^{-(\gamma+\beta)}$ *vermutet* [Camp 86]. Daraus würde man für die Steigung den Wert $1 + \beta/\gamma$ erwarten. Die für die Systeme von L=4 bis 63 ermittelten Steigungen sind in Abbildung 54 als Funktion der Gittergröße dargestellt. Die Steigung dieses Zweiges scheint in der Tat für größer werdende Systemgröße einem Grenzwert zuzustreben, der allerdings bei etwa 1.07 liegt und nicht bei 1.23 (gestrichelte Linie), wie man aus dem Verhältnis der kritischen Exponenten erwarten würde.

Die Korrelation von S_2 und Z_{max} für die Projektilfragmentation ist in Abbildung 55 gezeigt. Nur für die Golddaten kann aus der Kenntnis der Systemgröße das korrekte skalierte 2.Moment S_2 berechnet werden. Für Uran als Projektil kann nur S_2^{exp}, in dem die H-Isotope nicht enthalten sind, ermittelt werden. Da für die Untersuchung der Fragmen-

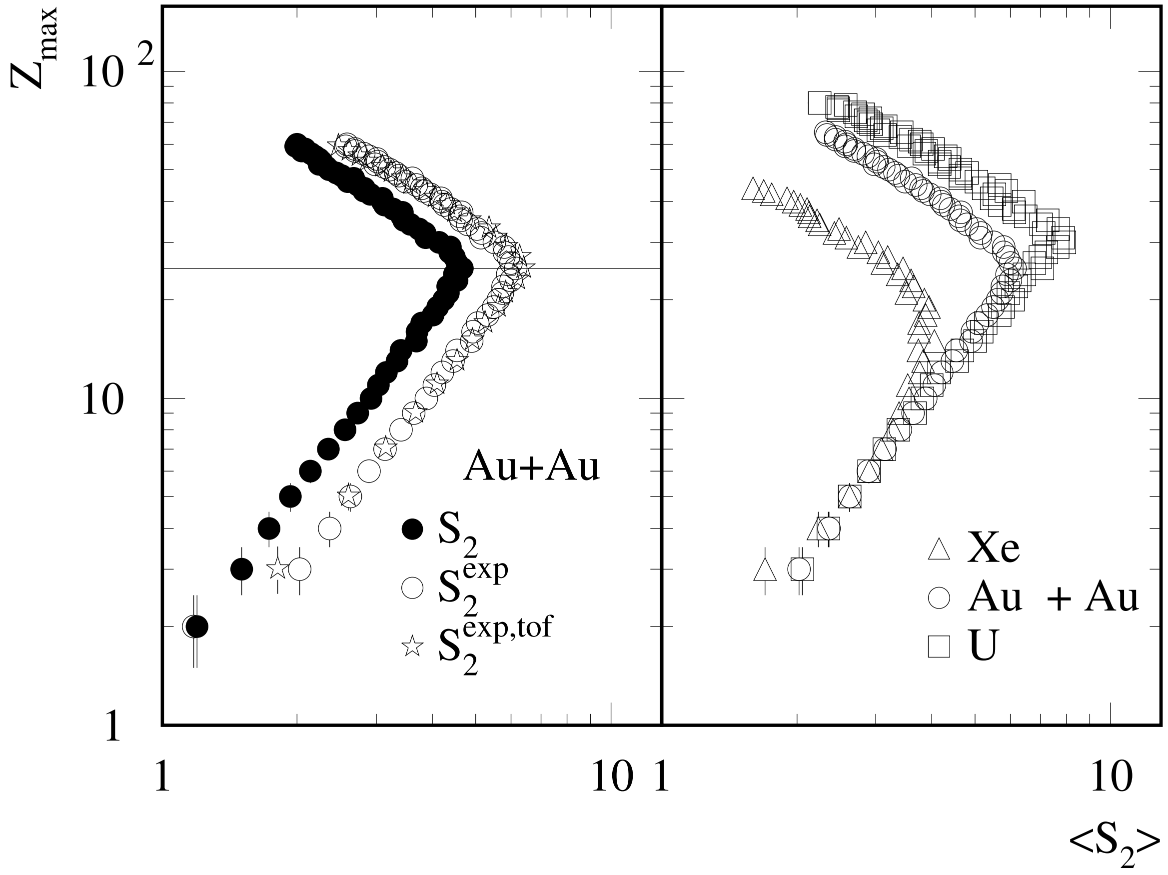

Abbildung 55: Die Korrelation von S_2 und Z_{max} für die Fragmentation von Xenon, Gold und Uran. Links sind die Verteilungen für das auf die H-Isotopenanzahl korrigierte Moment S_2, das unter Weglassung der H-Isotopen bei 1GeV gemessenen Moment S_2^{exp} und das bei 600MeV mit verminderter Akzeptanz von der Flugzeitwand gemessene Moment $S_2^{exp,tof}$ für das Gold-Projektil gezeigt. Auf der rechten Seite ist die Verteilung von S_2^{exp} für Gold und Uran, beziehungsweise $S_2^{exp,tof}$ für Xenon gezeigt.

tation von Xenon bei einer Energie von E/A=600MeV die Hodoskop-Informationen nicht für die Analyse zur Verfügung stand, kann hier nur das bei verminderter Akzeptanz der Flugzeitwand gemessene Moment $S_2^{exp,tof}$ verwendet werden. Alle drei Größen sind für Gold als Projektil im linken Bild gezeigt. Das Weglassen der H-Isotope führt zu einer Verschiebung der Kurve, wobei allerdings die Maximum-Position unverändert bleibt. Der Akzeptanzverlust, durch Verwendung nur der bei einer Energie von E/A=600MeV in der Flugzeitwand nachgewiesenen Teilchen, hat nur einen geringen Einfluß. Zum Vergleich der drei Projektile sind auf der linken Seite die Verteilungen mit S_2^{exp} für Gold und Uran, sowie $S_2^{exp,tof}$ für Xenon gezeigt. Die jeweils für die Steigungen der beiden Äste ermittelten Werte sind in Tabelle 4 aufgeführt. Daraus lassen sich allerdings keine Werte für die kritischen Exponenten ableiten.

Diese Darstellung ermöglicht die Einteilung der Ereignisse in zwei Klassen. Ereignisse auf dem oberen Zweig, bei denen Z_{max} größer als dem Wert bei der Position des Maximums ist, den man dem Flüssig- oder subkritischen Bereich zuordnen kann, und Ereignisse auf dem unteren Zweig, der den Gas- oder superkritischen Bereich darstellt [Kreu 92]. Abbildung 56 zeigt die Verteilung der Ereignisse auf beide Zweige für verschiedene Intervalle in Z_{BOUND}. Die Fläche der Quadrate ist dabei proportional dem eingehenden Wirkungsquerschnitt, normiert auf den insgesamt in das Z_{BOUND}-Intervall eingehenden Wirkungsquerschnitt. Der subkritische Zweig ist in dieser Darstellung rechts, der superkritische links. Für Ereignisse mit einem großen Wert in Z_{BOUND}, also einer kleinen Anregungsenergie, verteilen sich die Ereignisse im wesentlichen auf den subkritischen Zweig. Für kleiner werdendes Z_{BOUND} und damit wachsender Anregungsenergie wird mehr und mehr der superkritische Zweig populiert, bis schließlich für das Intervall $15 \leq Z_{BOUND} \leq 20$ die Ereignisse fast nur noch auf dem superkritischen Zweig zu finden sind. Addiert man nun den Wirkungsquerschnitt rechts des jeweiligen Maximums zum subkritischen, und den links des Maximums zum superkritischen Wirkungsquerschnitt auf und bildet das Verhältnis, so kommt man zu Abbildung 57. Diese Darstellung visualisiert sehr schön den Übergang von vorwiegend subkritischem Verhalten bei großen Z_{BOUND}-Werten zu vorwiegend superkritischem Verhalten bei kleinen Z_{BOUND}-Werten. Die Unterscheidung beider Klassen nach der Lage rechts, bzw. links, des Maximums ist zu einem gewissen Teil willkürlich.

Steigung	S_2	S_2^{exp}		$S_2^{exp,tof}$	
	Au	Au	U	Au	Xe
obere Gerade	-0.93 ± 0.05	-0.88 ± 0.05	-0.66 ± 0.06	-0.79 ± 0.05	-0.90 ± 0.10
untere Gerade	1.87 ± 0.08	1.93 ± 0.08	1.63 ± 0.09	1.84 ± 0.08	2.0 ± 0.20

Tabelle 4: Die aus den Verteilungen von $\langle S_2 \rangle$ gegen Z_{max} ermittelten Steigungen für den oberen (subkritischen) und unteren (superkritischen) Zweig.

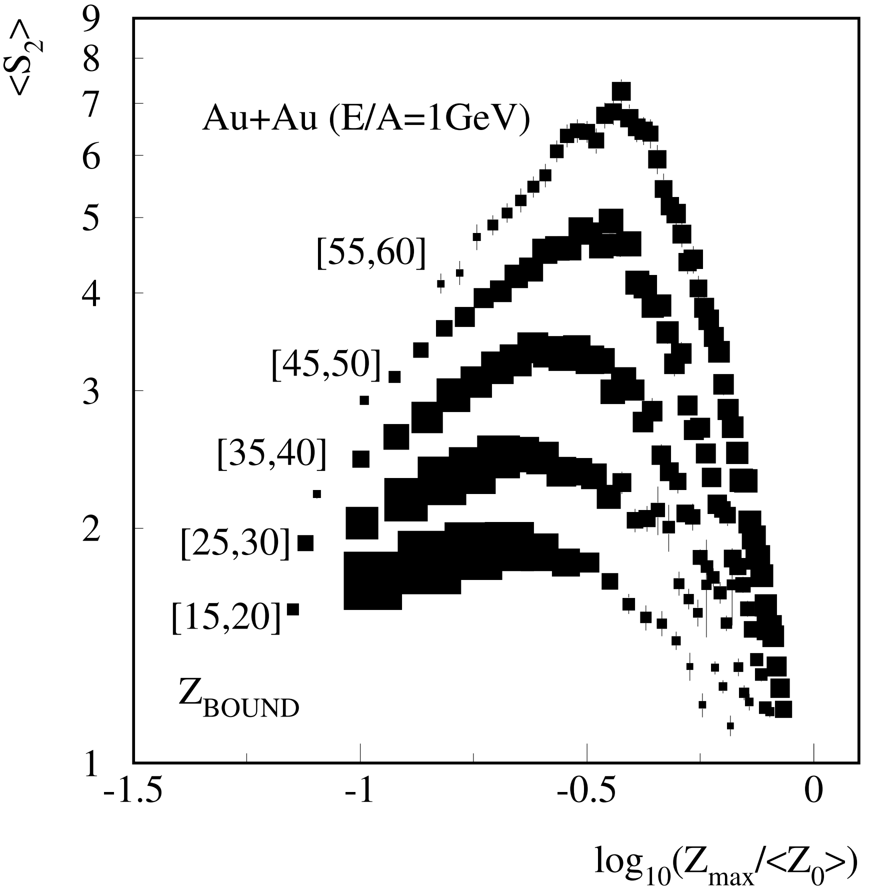

Abbildung 56: Die Korrelation von S_2 und Z_{max} für verschiedene Z_{BOUND}-Intervalle der Reaktion Au+Au bei E/A=1GeV. Die Fläche der Quadrate ist dabei proportional dem eingehenden Wirkungsquerscnitt, normiert auf den insgesamt in das Z_{BOUND}-Intervall eingehenden Wirkungsquerschnitt.

Im Perkolationsmodell beispielsweise ist der Mittelwert von S_{max} für Systeme mit der kritischen Bondwahrscheinlichkeit pb_C systematisch zu kleineren S_{max} im Vergleich zur Position des Maximums verschoben (gestrichelte Linie in Abbildung 53). Abbildung 57 kann deshalb auch nur ein qualitatives Bild des Übergangs liefern.
Am kritischen Punkt ist die Größe des schwersten Clusters durch

$$S_{max,c} \approx L^D \tag{39}$$

gegeben, wobei die sogenannte fraktale Dimension D über D=$1/\nu\sigma$ zu anderen Exponenten in Verbindung steht [Stau 91]. Nimmt man für $S_{max,c}$ den Wert mit maximalem $\langle S_2 \rangle$

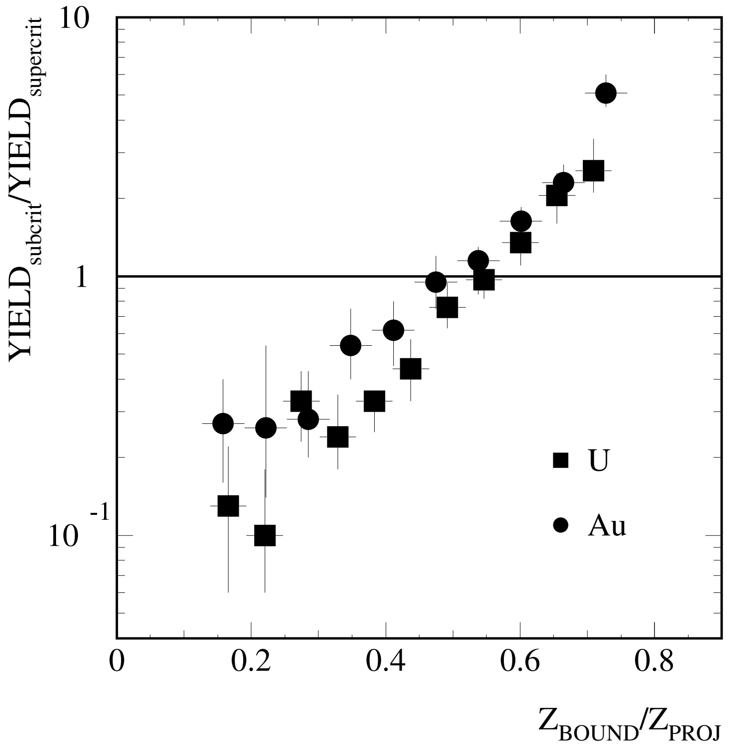

Abbildung 57: Verhältnis der Gesamtwirkungsquerschnitte auf dem subkritischen Zweig zu dem superkritischen Zweig für die Reaktionen von Gold und Uran auf Gold bei E/A=1GeV.

so erhält man aus Beziehung (39) für das Perkolationsmodell auch unter Verwendung nur der kleinen Gitter L=3,4,5,6 einen Wert für D von 2.56, der nahe dem Wert für ein unendliches System von 2.525 liegt. Die Methode angewandt auf den Aufbruch von Xe-,Ho-,Au-,Bi-,Th- und Es-Kernen im mikrokanonischen Metropolis-Modell von Gross et al. [Gross 90], ergab für die Dimension D einen Wert von 2.36±0.15 [Jaqa 91]. Die lineare Dimension L wurde dabei als $Z_0^{1/3}$ berechnet. Der aus den kritischen Exponenten berechnete Wert für den Flüssig-Gas-Phasenübergang beträgt D=2.46 . Die aus den Daten ermittelten Maxima-Positionen des mittleren S_2 in Z_{max} liegen bei 17.5±3, 25±2 und 30±4 für Xenon, Gold und Uran. Die Fehler enthalten dabei die systematischen Unsicherheiten in der Abtrennung der Spaltereignisse. Die wahre Systemgröße für die zu diesem Z_{max}-Wert beitragenden Ereignisse ist allerdings unbekannt. Unter der Annahme, daß das Verhältnis der Systemgröße Z_0 zur Projektilladung Z_{PROJ} in allen drei Fällen konstant ist, ergibt sich aus den Daten ein Wert für D von 3.0±0.7 . Der große Fehler resultiert zum einen aus den Unsicherheiten in der Bestimmung von $Z_{max,c}$, zum anderen aus der nur kleinen Variation in der Systemgröße.

5.3 Der Exponent τ aus der Clustergrößenverteilung

Um den Punkt des Übergangs quantitativ festlegen zu können, empfiehlt es sich Größen zu betrachten, die auch in kleinen Systemen möglichst unverfälscht durch finite-size-Effekte wiedergegeben werden. Wie in Kapitel 4.4 gezeigt, ist die Clustergrößenverteilung der verschiedenen Systemgrößen im Gas-Bereich, in dem auch im unendlichen System nur kleine Cluster auftreten, am wenigsten durch finite-size-Effekte beeinflußt und hat dort einen exponentiellen Charakter. Am kritischen Punkt zeigen auch kleine Systeme eine Verteilung, die durch ein Potenzgesetz beschrieben werden kann, wenn man nur Cluster bis zu einer Größe betrachtet, die in etwa einem Drittel der Systemgröße entspricht (siehe Abb. 33). Durch Einschränkung auf Cluster einer Größe kleiner diesem Wert lassen sich somit finite-size-Effekte in den Verteilungen weitgehendst reduzieren. Die Idee ist nun, den Übergang von einer exponentiellen Verteilung zu einer Verteilung, die durch ein Potenzgesetz gegeben ist, zur Festlegung des Übergangspunktes zu nutzen. Dazu wurden an die Clustergrößenverteilung bei verschiedenen Bondwahrscheinlichkeiten Funktionen in Form eines Potenzgesetzes

$$n_S \sim s^{-\tau}$$

mit dem Fitparameter τ und der Form eines Produkts aus Potenzgesetz und Exponentialgesetz

$$n_S \sim s^{-\tau} \cdot exp(-s/m_0)$$

mit τ und m_0 als Fitparameter angepaßt. Der Produktansatz entspricht genau der funktionalen Abhängigkeit, die man auch für ein Flüssig-Gas-System nach Gleichung (24) im Gas-Bereich erwartet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 58 dargestellt. Der Fitbereich erstreckte sich dabei von Clustern der Größe 2 bis hin zu Clustern der Größe Systemgröße(L^3)/3.

Im Gas-Bereich liefert die Anpassung eines reinen Potenzgesetzes keine gute Beschreibung der Ladungsverteilung, erkennbar an den hohen reduzierten χ^2-Werten[4] der Fits. Die Produktfunktion beschreibt dort die Verteilung wesentlich besser. Die durch beide Verfahren bestimmten τ-Werte sind in diesem Bereich unterschiedlich. Bei Annäherung an die kritische Bond-Wahrscheinlichkeit $pb_C \simeq 0.25$ wächst der m_0-Parameter stark an, für einen Wert $m_0 \gg L^3$ ist der Exponentialterm über den gesamten Anpassungsbereich konstant 1

---

[4] $\chi_r^2 = \chi^2/(N-M)$, wobei N die Zahl der Datenpunkte und M die der freien Fitparameter ist.

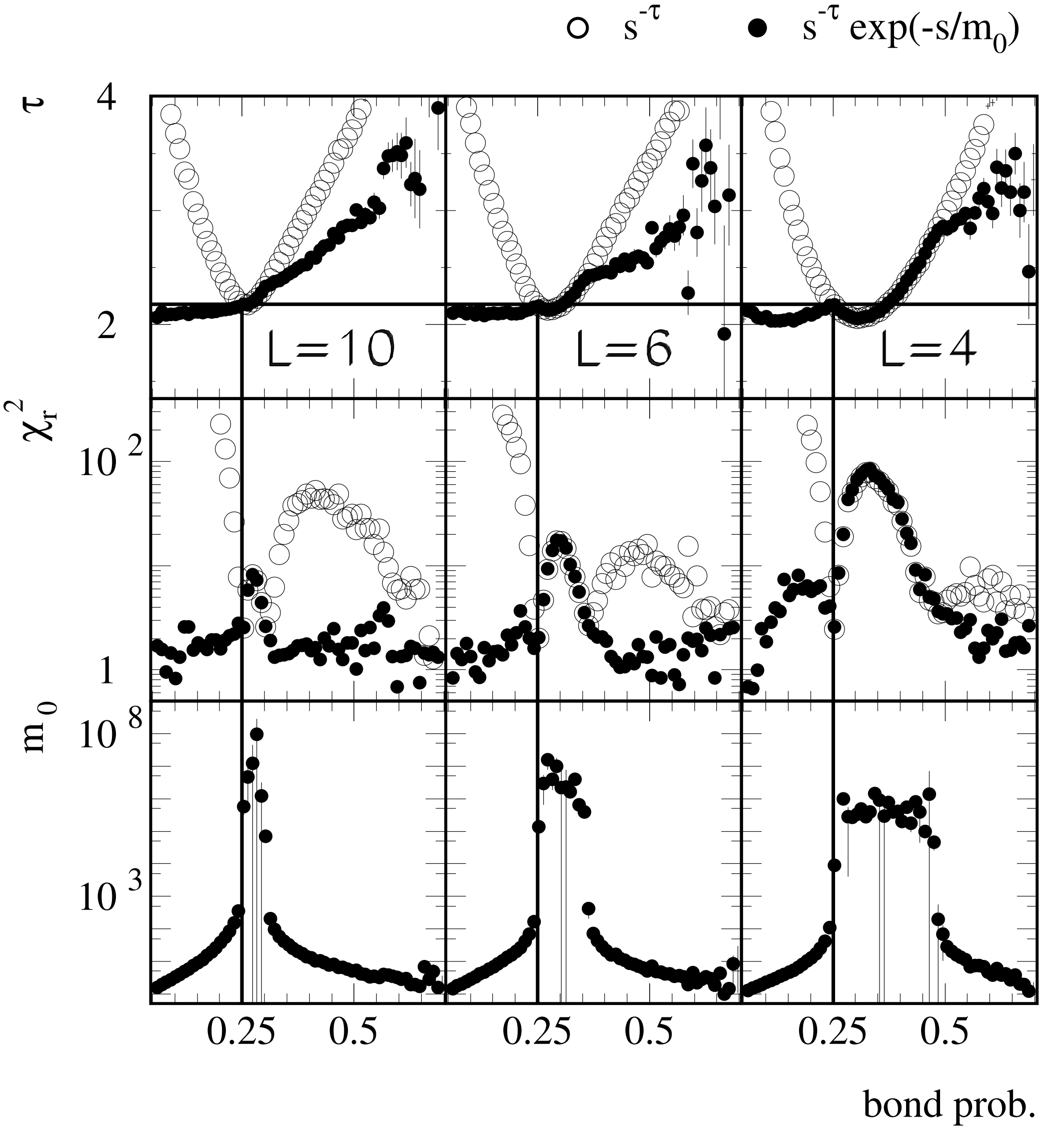

Abbildung 58: An die Clustergrößenverteilungen wurden Verteilungsfunktionen in Form eines reinen Potenzgesetzes $s^{-\tau}$ (offene Kreise) und einer Produktfunktion aus einem Potenzgesetz und einer Exponentialfunktion $s^{-\tau} \cdot exp(-s/m_0)$ (Punkte) angepasst. Im oberen Bild sind die so ermittelten Werte für den τ-Parameter als Funktion der Bond-Wahrscheinlichkeit für Gitter der Größe L=10,6,4 dargestellt. Das mittlere Bild zeigt als Maß für die Qualität der Anpassung die Werte für das reduzierte χ^2. Im unteren Bild ist der m_0-Parameter der Produktfunktion gezeigt.

und beide Fitfunktionen und bestimmten τ-Parameter werden identisch. Die Wahrscheinlichkeit, bei der dieses Zusammentreffen stattfindet, liegt für alle Gitter – hinunter bis zu L=4 – beim gleichen Wert, der mit der kritischen Bond-Wahrscheinlichkeit für das unendliche Gitter identisch ist. Der dort bestimmte Wert für τ stimmt ebenfalls sehr gut mit dem kritischen Exponenten $\tau = 2.18$ überein. In dem mit abnehmender Systemgröße wachsenden Bereich sehr großer m_0-Werte liefern beide Funktionen keine zufriedenstellende Beschreibung der Ladungsverteilung. In diesem Bereich kann das, das unendliche Cluster repräseantierende, schwerste Cluster nicht eindeutig von den schwereren Clustern des Gases getrennt werden. Hat für größere Bond-Wahrscheinlichkeiten das schwerste Cluster im Mittel eine Größe $> L^3/3$ und sind die Verteilungen des schwersten Clusters und der leichten Cluster deutlich getrennt, so läßt sich die Verteilung wiederum durch die Produktfunktion beschreiben und nimmt für größer werdende Bond-Wahrscheinlichkeit immer mehr exponentiellen Charakter an.

Vom Gasbereich kommend kann das Zusammentreffen der τ-Parameter beider Fitfunktionen zur Bestimmung des kritischen Kontrollparameters und des kritischen Exponenten τ benutzt werden. Für die Verwendung von S_{BOUND} als Kontrollparameter ist das Ergebnis der Methode für das L=4 Gitter in Abbildung 59 dargestellt. Zur Überprüfung des Einflusses der Lage des Anpassungsbereichs wurden die untere Grenze zwischen 2 und 5, sowie die obere Grenze zwischen $21(=L^3/3)$ und $32(=L^3/2)$ variiert. Eine Erhöhung der unteren Grenze ist insbesondere bei der Anwendung auf die Daten sinnvoll, da im Bereich kleiner Ladungen die Ladungsverteilung durch Zerfälle instabiler Fragmente verfälscht ist, beispielsweise entsteht durch den Zerfall des teilcheninstabilen ^8Be eine deutliche Verringerung der beobachteten Teilchen mit Z=4. In allen Fällen findet der Übergang bei dem korrekten Wert für $S_{BOUND,C} = \langle S_{BOUND}(pb_C)\rangle$ und dem korrekten Wert für τ statt. Innerhalb des Perkolationsmodells ist die beschränkte Auflösung von S_{BOUND} bei kleinen Systemgrößen (siehe Abb. 35) immer noch ausreichend, um den Übergangspunkt zu definieren.

In Anwendung auf die Daten der Projektilfragmentation aus der Reaktion Au+Au bei E/A=1GeV sind die Resultate für drei verschiedene Bereiche, in denen die Funktionen der Ladungsverteilungen angepaßt wurden, in Abbildung 60 dargestellt. Wie im Perkolationsmodell zeigt sich hier das gleiche Verhalten, daß im Gasbereich (kleines Z_{BOUND}) die Produktfunktion die Verteilungen besser beschreibt, auch wenn der Effekt hier aufgrund der schlechteren Statistik weniger ausgeprägt ist. Das reine Potenzgesetz liefert

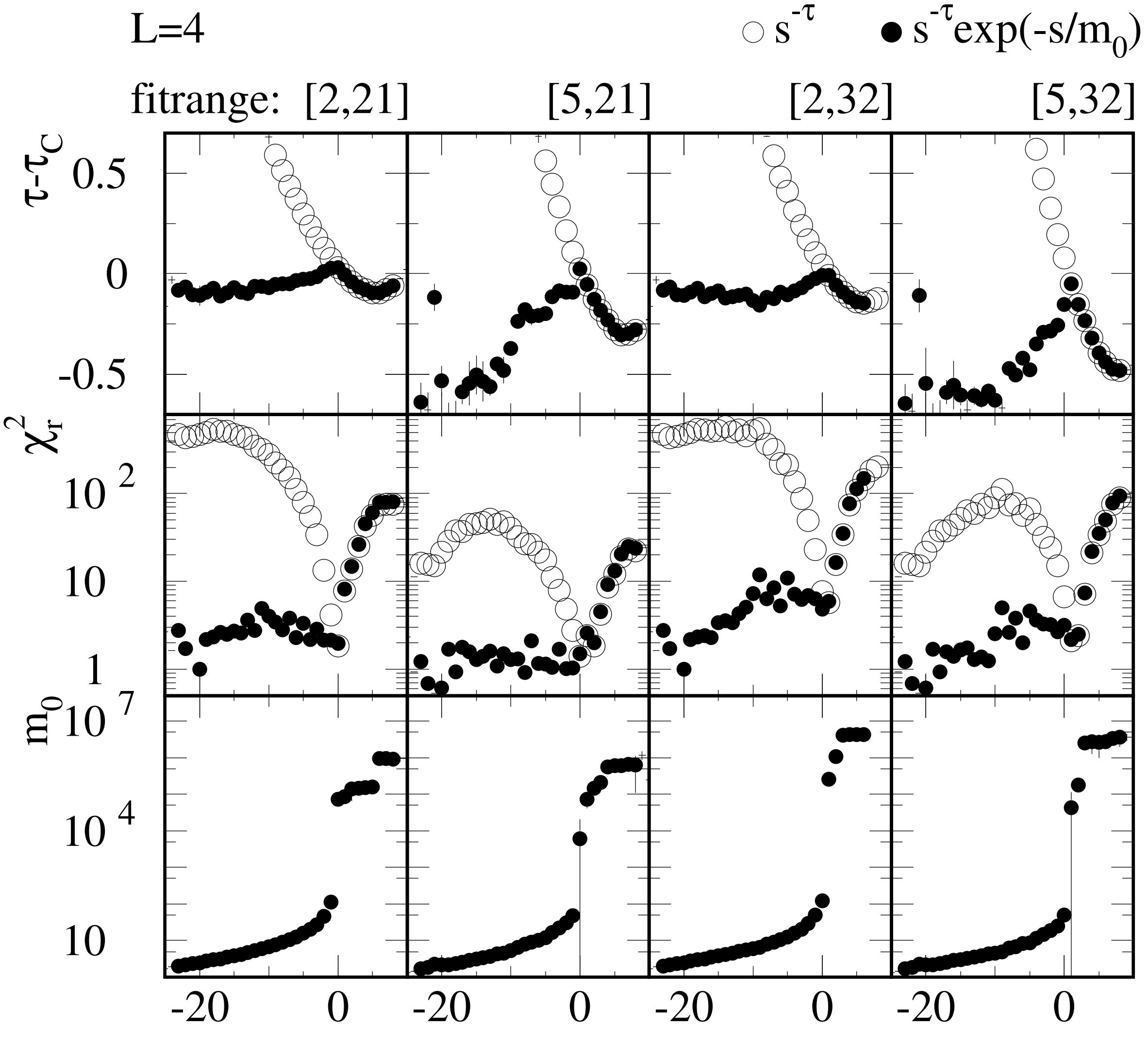

Abbildung 59: Ergebnisse der Methode mit S_{BOUND} als Kontrollparameter. Die Punkte zeigen den extrahierten Parameter durch Anpassung eines reinen Potenzgesetz, die offenen Kreise die Werte durch Anpassung der Produktfunktion. Zur Überprüfung des Einflusses der Lage des Anpassungsbereichs wurden die untere Grenze zwischen 2 und 5, sowie die obere Grenze zwischen $21(=L^3/3)$ und $32(=L^3/2)$ variiert.

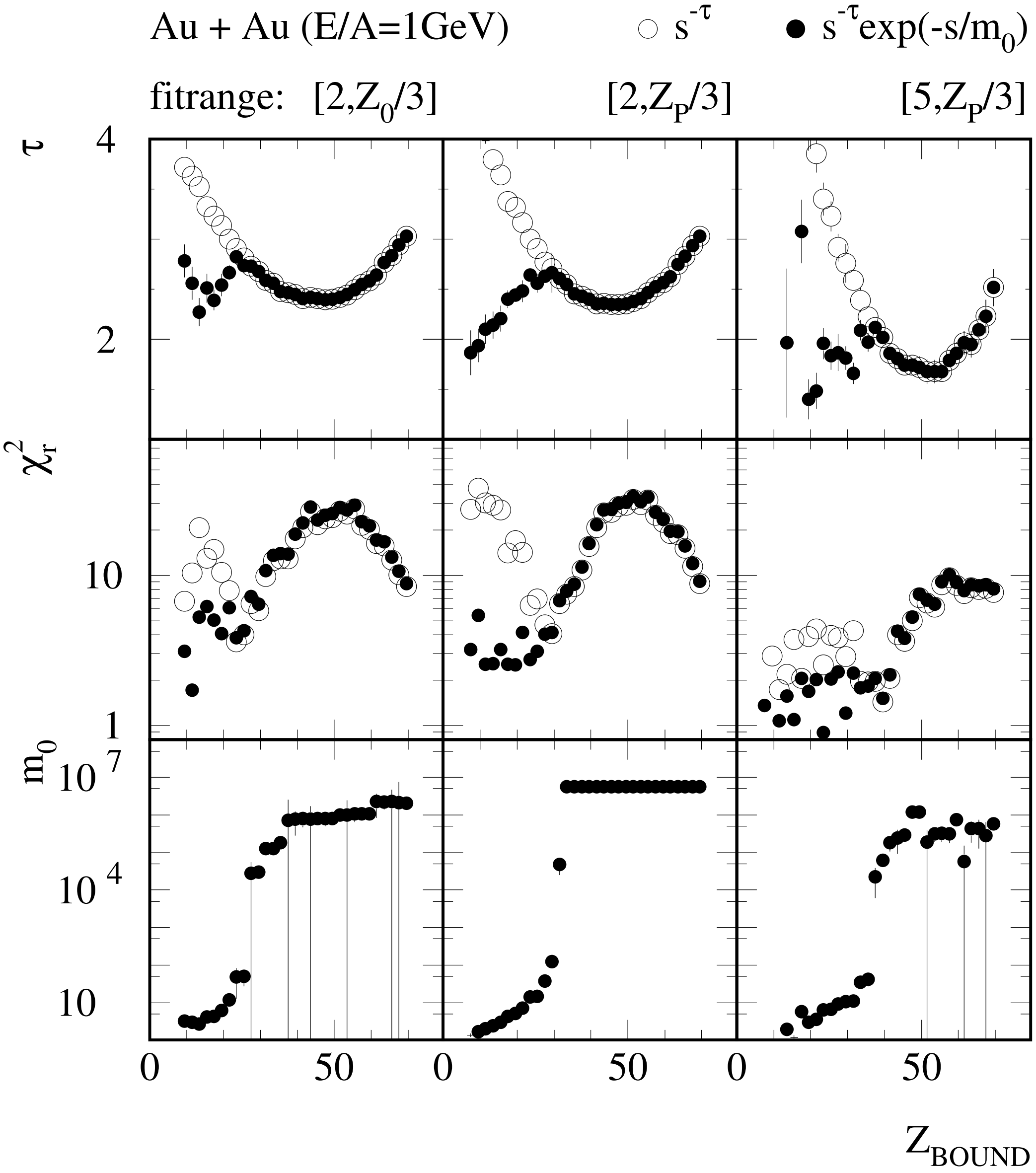

Abbildung 60: Die durch Anpassung eines Potenzgesetzes (offene Symbole) und der Produktfunktion (schwarze Punkte) extrahierten Werte für τ als Funktion von Z_{BOUND} für die Reaktion Au+Au bei E/A=1GeV. Der Anpassungsbereich erstreckt von Z=2 bis zu einem Drittel der Systemgröße Z_0 im linken Bild, von Z=2,bzw. Z=5, bis zu einem Drittel der Projektilladung im mittleren, bzw. rechten Bild.

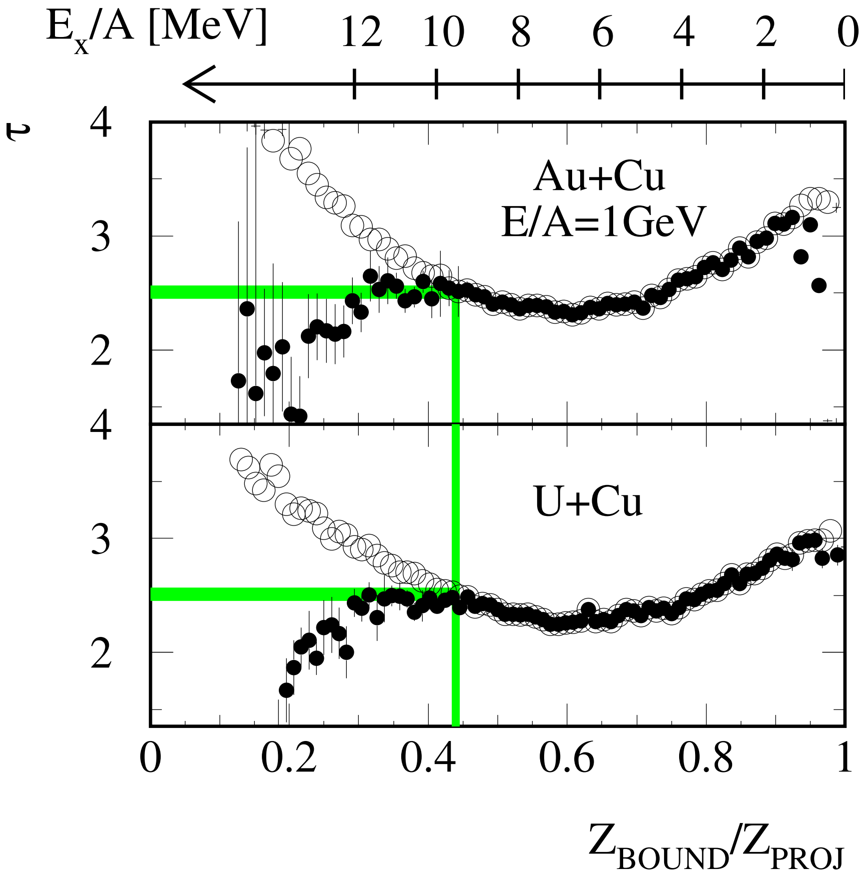

Abbildung 61: Die durch Anpassung eines Potenzgesetzes (offene Kreise) und der Produktfunktion (Punkte) extrahierten Werte für τ als Funktion des auf die Projektilladung normierten Z_{BOUND} für die Reaktionen von Au und U auf Cu bei einer Einschußenergie von E/A=1GeV. Der Anpassungsbereich erstreckte sich dabei von Z=2 bis zu einem Drittel der Projektilladung. Die obere Skala entspricht der aus Kapitel 3.3 ermittelten Beziehung der Anregungsenergie zu Z_{BOUND}.

in diesem Bereich deutlich größere Werte für den τ-Parameter als die Produktfunktion. Der Übergang zu einem reinen Potenzgesetz läßt sich in allen drei Fällen an dem Sprung des m_0-Parameters und dem damit verbundenen identisch werden der τ-Parameter erkennen. Die Übergänge liegen in diesen drei Anpassungsbereichen $[2, Z_0/3]$, $[2, Z_{PROJ}/3]$ und $[5, Z_{PROJ}/3]$ bei Z_{BOUND}-Werten von 28,33 und 38. Die dazugehörigen Werte für τ sind 2.7,2.55 und 2.1 . Aufgrund der geringen Varianz des τ-Parameters verschiedener Systeme (z.B. τ=2.18 (Perkolation), 2.2 (Flüssig-Gas)) erscheint die Genauigkeit, mit der sich τ

mit dieser Methode bestimmen läßt, wenig aussagekräftig. Der Übergangspunkt läßt sich so auf Z_{BOUND}=35±5 festlegen.

Einen solchen Übergang findet man ebenfalls für die Fragmentation des Urankernes. Die Ergebnisse für die Reaktion U+Cu sind zusammen mit den Ergebnissen für die Reaktion Au+Cu in Abbildung 61 gezeigt. In beiden Fällen findet man einen Übergang bei $Z_{BOUND}/Z_{PROJ} \approx 0.44$, der im Falle des Goldkerns einem Z_{BOUND}-Wert von 35 entspricht. Aus der bekannten Beziehung zwischen Z_{BOUND} und der Anregungsenergie bei der Fragmentation des Golkernes läßt sich die Anregungsenergie, bei der der Übergang stattfindet, ermitteln. Diese Analyse deutet auf einen Übergang bei einer Anregungsenergie von $E_X/A \approx$ 9-10 MeV hin, an dem auch in der kalorischen Kurve das Ansteigen der Temperatur in der Gasphase beobachtet wird [Möhl 95].

6 Zusammenfassung

Motiviert durch die Tatsache, daß zahlreiche Beobachtungen auf einen Flüssig-Gas Phasenübergang in Kernen hindeuten, wurden - unter der Annahme eines Phasenübergangs zweiter Ordnung - verschiedene Methoden zur Extraktion kritischer Exponenten aus Daten der Projektilfragmentation in relativistischen Schwerionenreaktionen untersucht:

1. Die zuvor von der EOS-Kollaboration angewandte Methode [Elli 94, Gilk 94] zur Bestimmung der kritischen Exponenten γ und β aus der Verteilung des zweiten Moments und der Größe des schwersten Fragments Z_{max}.
2. Die von Campi [Camp 88] vorgeschlagene Methode zur Bestimmung des Verhältnisses von γ und β aus der Korrelation des skalierten, zweiten Momentes und Z_{max}.
3. Die Festlegung des Übergangspunktes und Bestimmung des Exponenten τ durch Betrachtung der Änderung der Form der Fragmentgrößenverteilung beim Übergang in die Gas-Phase [Pana 84].

Um den Einfluß der endlichen Größe zu studieren, wurden die Methoden auf die im Rahmen des Perkolationsmodells, dessen kritischer Punkt und kritische Exponenten für unendliche Systeme bekannt sind, vorhergesagten Fragmentverteilungen, die denen von Kernfragmentationen sehr ähnlich sind, angewandt.

Zur Bestimmung der kritischen Exponenten γ und β aus der Verteilung des zweiten Moments und der Größe des schwersten Fragments Z_{max} wurde in der vorliegenden Arbeit eine Methode verwendet, die sich in den für die Analyse notwendigen *ad hoc* Annahmen von der von der EOS-Kollaboration verwendeten unterscheidet. Für das Perkolationsmodell ergeben beide Methoden identische Ergebnisse. Keine der beiden Methoden erlaubt allerdings dort bei Systemgrößen, vergleichbar der Größe von Kernen, die korrekten Werte für die kritischen Exponenten zu extrahieren. Es wurde eine Sensitivität der Resultate bezüglich der speziellen Wahl des zur Ereignischarakterisierung benutzten Kontrollparameters festgestellt, die sich im Perkolationsmodell aus den Nichtlinearitäten zwischen der Bond-Wahrscheinlichkeit und aus der Clusterverteilung berechneter Größen wie S_{BOUND} oder der Multiplizität ergibt. Solche Nichtlinearitäten erwartet man auch beim Wechseln von der Temperatur nach Z_{BOUND} oder der Multiplizität für den nuklearen Fall aus der kalorischen Kurve. Im Gegensatz zum Perkolationsmodell kommen die Methoden, angewandt auf die Daten der Kernfragmentation, zu unterschiedlichen Ergebnissen, obwohl die experimentellen Verteilungen keine Unterschiede erkennen lassen.

Die von Campi vorgeschlagene Methode (2) eliminiert zwar die explizite Abhängigkeit von einem speziell zu wählenden Kontrollparameter, eignet sich zur Bestimmung kritischer Exponenten aber ebenfalls erst für wesentlich größere Systeme, als sie im nuklearen Fall vorliegen.

Bei der dritten Methode wird das System nur in der Gas-Phase betrachtet, in der die durch die Endlichkeit des Systems bedingten finite-size-Effekte ohnehin weniger ausgeprägt sind als im Flüssig-Bereich. Anders als bei der Berechnung der Momente, bei der immer über alle vorhandenen Clustergrößen summiert wird, erlaubt diese Methode die Selektion eines Bereiches von Clustergrößen, der auch am kritischen Punkt weitestgehend unbeinflußt durch finite-size-Effekte ist. Da in dieser Methode die Clusterverteilungen nur lokal betrachtet werden, spielen Nichtlinearitäten des verwendeten Kontrollparameters keine Rolle. Der Kontrollparameter muß lediglich eine ausreichende Diskriminierung der Ereignisse ermöglichen. Im Perkolationsmodell erfüllen sowohl S_{BOUND} als auch die Multiplizität diese Anforderung. Die Methode ermöglicht in diesem Modell die zuverlässige Bestimmung des Übergangspunktes und des Exponenten τ bis hinunter zu Systemen der Größe L=4 (64 Konstituenten). In den Daten der Kernfragmentation ist die Ladungsverteilung im Bereich kleiner Ladungen durch Zerfälle instabiler Fragmente verfälscht. Eine Variation der unteren Grenze des Bereichs an Fragmentladungen hat dadurch einen merklichen Einfluß auf die Resultate für den Parameter τ, so daß für den resultierenden Wert nur das Intervall $[2.1, 2.7]$ angegeben werden kann, eine Genauigkeit die aufgrund der Ähnlichkeit der τ-Werte verschiedener System keine Einordnung in eine Universalitätsklasse erlaubt. Der Übergangspunkt läßt sich dagegen für die Fragmentation des Goldkernes auf Z_{BOUND}=35±5 festlegen, dies entspricht einer gemessenen Anregungsenergie von $E_X/A \approx$ 9-10 MeV. Dort wird auch in der kalorischen Kurve das Ansteigen der Temperatur in der Gasphase beobachtet.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß keine der Methoden die Bestimmung kritischer Exponenten mit einer numerischen Genauigkeit erlaubt, die ausreichend wäre, um die Zugehörigkeit zu einer Universalitätsklasse zu entscheiden. Methode (3) erlaubt allerdings eine Definition des Punktes, an dem - im Rahmen der Interpretation der Daten als kritischem Phänomen - der Phasenübergang stattfindet. Dieser stimmt mit dem Ergebnis des Übergangspunktes in die Gas-Phase aus der kalorischen Kurve überein.

Literatur

[Alad 88] The ALADIN Collaboration
Proposal for a Forward Spectrometer at the 4π Detector
GSI-Report 88-08 (März 1988) ISSN 0171-4546
GSI-Nachrichten 02-89 (1988)

[Bak 88] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld
Self-organized criticality
Phys. Rev. A 38 (1988) 364

[Bak 91] P. Bak und K. Chen
Self-organized criticality
Scientific American Jan. 1991

[Barz 86] H.W. Barz, J.P. Bondorf, R. Donangelo, H. Schulz
Connection between the thermodynamical and the percolation models of nuclear fragmentation
Phys. Lett. 169B (1986) 318

[Baue 88] W. Bauer
Extraction of signals of a phase transition from nuclear multifragmentation
Phys. Rev. C 38 (1988) 1297

[Belk 94] M. Belkacem et al.
Dynamics of unstable matter
Phys. Lett. B 326 (1994) 21

[Bert 83] G. Bertsch und P.J. Siemens
Nuclear fragmentation
Phys. Lett. B 126 (1983) 9

[Blai 91] T. Blaich, T.W. Elze, H. Emling, H. Freiersleben, K. Grimm, W. Henning, R. Holzmann, G. Ickert, J.G. Keller, H. Klingler, W. Kneissl, R. König, R. Kulessa, J.V. Kratz, D. Lambrecht, J.S. Lange, Y. Leifels, E. Lubkiewicz, M. Proft, W. Prokopowicz, C. Schütter, R. Schmidt, H. Spies, K. Stelzer, J. Stroth, W. Walus, E. Wajda, H.J. Wollersheim, M. Zinser, E. Zude
A large area detector for high-energy neutrons
Nucl. Instr. and Meth. A314 (1992) 136

[Blüm 88] R. Blümel, J.M. Chen, E. Peik, W. Quint, W. Schleich, Y.R. Shen, H. Walther
Phase transitions of stored laser-cooled ions
Nature 334 (1988) 309

[Biro 86] T.S. Biro, J. Knoll, J. Richert
Percolation in finite space: A picture of nuclear fragmentation ?
Nucl. Phys. A459 (1986) 692

[Boal 86] D.H. Boal und A.L. Goodman
Fragmentation in the mechanical instability region
Phys. Rev. C 33 (1986) 1690

[Boal 90] D.H. Boal und J.N. Glosli
Fluctuation growth and spinodal decomposition in heavy ion reactions
Phys. Rev. C 42 (1990) R502

[Bond 85] J. Bondorf, R. Donangelo, I.N. Mishustin, H. Schulz
Statistical multifragmentation of nuclei
Nucl. Phys. A 444 (1985) 460

[Bote 94] R. Botet, M. Ploszajczak
New trends in kinetic fragmentation theory
Int. Journ. of Mod. Phys. E 3 (1994) 1033

[Camp 86] X. Campi
Multifragmentation: Nuclei break up like percolation clusters
J. Phys. A: Math. Gen. 19 (1986) L917

[Camp 88] X. Campi
Signals of a phase transition in nuclear multifragmentation
Phys. Lett. B 208 (1988) 351

[Camp 94] X. Campi, H. Krivine and E. Plagnol
Size and excitation energy distributions of projectile spectators in ALADIN multifragmentation data
Phys. Rev. C 50 (1994) R2680

[Chen 92] H.-P. Cheng
Complete statistical thermodynamics of the cluster solid-liquid transition
Phys. Rev. A 46 (1992) 791

[Desb 87] J. Desbois
Heavy ion collisions and the site-bond percolation
Nucl. Phys. A466 (1987) 724

[Dohn 70] J.S. Dohnanyi
J. Geophys. Res. 75 (1970) 3468

[Donn 84] J.R. Donnison und R.A. Sugden
The distribution of asteroid diameters
Mon. Not. R. Astron. Soc. 210 (1984) 673

[Doss 88] K.G.R. Doss, H.-A. Gustafsson, H.H. Gutbrod, D. Hahn, K.-H. Kampert, B. Kolb, H. Löhner, A.M. Poskanzer, H.G. Ritter, H.R. Schmidt, H. Stöcker
Multiplicity and bombarding energy dependence of the entropy in relativistic heavy–ion reactions
Phys. Rev. C 37 (1988) 163

[Elli 94] J.B. Elliot, M.L. Gilkes, J.A. Hauger, A.S. Hirsch, E. Hjort, N.T. Porile, R.P. Scharenberg, B.K. Srivastava, M.L. Tincknell, P.G. Warren
Extraction of critical exponents from very small percolation lattices
Phys. Rev. C 49 (1994) 3185

[Finn 82] J.E. Finn, S. Agarwal, A. Bujak, J. Chuang, L.J. Gutay, A.S. Hirsch, R.W. Minich, N.T. Porile, R.P. Scharenberg, B.C. Stringfellow
Nuclear fragment mass yield from high-energy proton-nucleus interactions
Phys. Rev. Lett. 49(1982)1321

[Fish 67] M.E. Fisher
The theory of condensation and the critical point
Physics Vol.3 No.5 (1967) 255

[Fish 74] M.E. Fisher
The renormalization group theory of critical behavior
Rev. Mod. Phys. 46 (1974)

[Flie 93] T. Fließbach
Statistische Physik
B.I. Wissenschaftsverlag,Mannheim (1993)

[Frie 90] W.A. Friedman
Rapid massive cluster formation
Phys. Rev. C 42 (1990) 667

[Gilk 94] M.L. Gilkes, S. Albergo, F. Bieser, F.P. Brady, Z. Caccia, D.A. Cebra, A.D. Chacon, J.L. Chance, Y. Choi, S. Costa, J.B. Elliott, J.A. Hauger, A.S. Hirsch, E.L. Hjort, A. Insolia, M. Justice, D. Keane, J.C. Kintner, V. Lindenstruth, M.A. Lisa, U. Lynen, H.S. Matis, M. McMahan, C. McParland, W.F.J. Müller, D.L. Olson, M.D. Partlan, N.T. Porile, R. Potenza, G. Rai, J. Rasmussen, H.G. Ritter, J. Romanski, J.L. Romero, G.V. Russo, H. Sann, R. Scharenberg, A. Scott, Y. Shao, B.K. Srivastava, T.J.M. Symons, M. Tincknell, C. Tuve, S. Wang, P. Warren, H.H. Wieman, K. Wolf
The determination of critical exponenets from the multifragmentation of gold nuclei
Phys. Rev. Let. 73(1994)1590

[Glen 92] N.K. Glendenning
First-order transition with more than one conserved charge : Consequences for neutron stars
Phys. Rev. D 46 (1992) 1274

[Grad 85] D.E. Grady und M.E. Kipp
Geometric statistics and dynamic fragmentation
J. Appl. Phys. 58 (1985) 1210

[Gross 90] D.H.E. Gross
Statistical decay of very hot nuclei - the production of large clusters
Rep. Prog. Phys. 53 (1990) 605

[Gross 93] D.H.E. Gross
Multifragmentation link between fission and the liquid-gas phase-transition
Prog. Part. Nucl. Phys. 30 (1993) 155

[Groß 94] C. Groß
Entwicklung und Test eines 0°-Detektors für die ALADIN-Flugzeitwand
Diplomarbeit, Universität Frankfurt(1994)

[Gutb 82] H.H. Gutbrod, A.I. Warwick, H. Wieman
Nuclear desintegration in relativistic heavy ion collisions
Nucl. Phys. A 387 (1982) 177c

[Hüll 94] A. Hüller
First order phase transition in the canonical and the microcanonical ensemble
Z. Phys. B 93 (1994) 401

[Hube 91] J. Hubele, P. Kreutz, J.C. Adloff, M. Begemann-Blaich, P. Bouissou, G. Imme, I. Iori, G.J. Kunde, S. Leray, V. Lindenstruth, Z. Liu, U. Lynen, R.J. Meijer, U. Milkau, A. Moroni, W.F.J. Müller, C. Ngo, C.A. Ogilvie, J. Pochodzalla, G. Raciti, G. Rudolf, H. Sann, A. Schüttauf, W. Seidel, L. Stuttge, W. Trautmann, A. Tucholski
Fragmentation of gold projectiles: From evaporation to total disassembly
Z. Phys. A 340 (1991) 263

[Hube 92a] J.C. Hubele
Untersuchung der Multi-Fragment-Produktion in asymmetrischen Schwerionenreaktionen bei E/A=600MeV
Doktorarbeit, Universität Frankfurt(1992)

[Hube 92b] J. Hubele, P. Kreutz, V. Lindenstruth, J.C. Adloff, M. Begemann-Blaich, P. Bouissou, G. Imme, I. Iori, G.J. Kunde, S. Leray, Z. Liu, U. Lynen, R.J. Meijer, U. Milkau, A. Moroni, W.F.J. Müller, C. Ngo, C.A. Ogilvie, J. Pochodzalla, G. Raciti, G. Rudolf, H. Sann, A. Schüttauf, W. Seidel, L. Stuttge, W. Trautmann, A. Tucholski, R. Heck, A.R. DeAngelis, D.H.E. Gross, H.R. Jaqaman, H.W. Barz, H. Schulz, W.A. Friedman, R.J. Charity
Statistical fragmentation of Au projectiles at E/A=600MeV
Phys. Rev. C 46 (1992) R1577

[Imry 80] Y. Imry
Finite-size rounding of a first-order phase transition
Phys. Rev. B 21 (1980) 2042

[Jaqa 83] H. Jaqaman, A.Z. Mekjian, L. Zamik
Nuclear condensation
Phys. Rev. C 27 (1983) 2782

[Jaqa 90] H.R. Jaqaman, G. Papp, D.H.E. Gross
Percolation versus microcanonical fragmentation - comparison of fragment size distributions
Nucl. Phys. A514 (1990) 327

[Jaqa 91] H.R. Jaqaman, D.H.E. Gross
Signals of the liquid-gas phase transitions in the fragmentation of hot nuclei: Finite-size scaling
Nucl. Phys. A524 (1991) 321

[Kemp 93] J. Kempter
Analyse und Bau eines positionsempfindlichen Szintillationsdetektors
Diplomarbeit, Universität Frankfurt(1993)

[Kreu 92] P. Kreutz
Ladungskorrelationen beim Aufbruch von Goldprojektilen in Reaktionen bei E/A=600MeV
Doktorarbeit, Universität Frankfurt(1992)

[Kreu 93] P. Kreutz, J.C. Adloff, M. Begemann-Blaich, P. Bouissou, J. Hubele, G. Imme, I. Iori, G.J. Kunde, S. Leray, V. Lindenstruth, Z. Liu, U. Lynen, R.J. Meijer, U. Milkau, A. Moroni, W.F.J. Müller, C. Ngo, C.A. Ogilvie, J. Pochodzalla, G. Raciti, G. Rudolf, H. Sann, A. Schüttauf, W. Seidel, L. Stuttge, W. Trautmann, A. Tucholski
Charge correlation as a probe of nuclear disassembly
Nucl. Phys. A 556 (1993) 672

[Kund 94] G.J. Kunde
Multifragmentation in der Reaktion $^{197}Au + ^{197}Au$ in zentralen Kollisionen bei E/A=100MeV und peripheren Kollisionen bei E/A=400MeV
Doktorarbeit, Universität Frankfurt(1994)

[Kund 95] G.J. Kunde, W.C. Hsi, W.D. Kunze, A. Schüttauf, A. Wörner, M. Begemann-Blaich, T. Blaich, D.R. Bowman, R.J. Charity, A. Cosmo, A. Ferrero, C.K. Gelbke, J. Hubele, G. Imme, I. Iori, P. Kreutz, V. Lindenstruth, M.A. Lisa, W.G. Lynch, U. Lynen, M. Mang, T. Möhlenkamp, A. Moroni, W.F.J. Müller, M. Neumann, B. Ocker, C.A. Ogilvie, G.F. Peaslee, J. Pochodzalla, G. Raciti, T. Rubehn, H. Sann, W. Seidel, V. Serfling, L.G. Sobotka, J. Stroth, L. Stuttge, S. Tomasevic, W. Trautmann, M.B. Tsang, A. Tucholski, G. Verde, C.W. Williams, E. Zude, B. Zwieglinski
Fragment flow and the multifragmentation phase space
Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 38

[Kunz 95] W.D. Kunze
Doktorarbeit, Universität Frankfurt(1995) (in Vorbereitung)

[Laba 90] P. Labastie und R.L. Whetten
Statistical thermodynamics of the cluster solid-liquid transition
Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 1567

[Land 80] Landau and Lifshitz
Statistical Physics
3rd Edition Part1 (1980)

[Levi 85] S. Levit und P. Bonche
Nucl. Phys. A437 (1985) 426

[Lind 93] V. Lindenstruth
Dynamik der Multifragmentation
Doktorarbeit, Universität Frankfurt(1993)

[Lope 84] J.A. Lopez und P.J. Siemens
Nuclear fragmentation
Nucl. Phys. A 431 (1984) 728

[Ma 76] S.K. Ma
Modern theory of critical phenomena
Benjamin, N.Y. (1976)

[Mang 92] M. Mang
Raumladungseffekte der Proportionalzähler in einer Vielfachionisationskammer
Diplomarbeit, Universität Frankfurt(1992)

[Möhl 95] T. Möhlenkamp
Doktorarbeit, Universität Dresden(1995) (in Vorbereitung)

[McCr 68] R.E. McCrosky
Spec. Rep. 280 (1968), Smithonian Astrophys. Observ., Washington D.C.

[Odde 94] L. Oddershede, P. Dimon, J. Bohr
Self-organized criticality in fragmenting

[Ocke 93] B. Ocker
Kalibrierung der ALADIN-Flugzeitwand
Diplomarbeit, Universität Frankfurt(1993)

[Ogil 89] C.A. Ogilvie, D.A. Cebra, J. Clayton, S. Howden, J. Karn, A. VanderMolen, G.D. Westfall, W.K. Wilson, J.S. Winfield
Determination of the impact vector in intermediate energy heavy ion collisions
Phys. Rev. C 40 (1989) 654

[Pana 84] A.D. Panagiotou, M.W. Curtin, H. Toki, D.K. Scott, P.J. Siemens
Experimental evidence for a liquid gas phase transition in nuclear systems
Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 496

[Papp 94] G. Papp und W. Nörenberg
The path of hot nuclei towards multifragmentation
Proceedings of the International Workshop XXII on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Hirschegg 1994, S.87

[Peil 91] G. Peilert, J. Randrup, H. Stöcker, W. Greiner
Clustering in nuclear matter at subsaturation densities
Phys. Lett. B 260 (1991) 271

[Poch 95] J. Pochodzalla, T. Möhlenkamp, T. Rubehn, A. Schüttauf, A. Wörner, E. Zude, M. Begemann-Blaich, T. Blaich, C. Gross, H. Emling, A. Ferrero, G. Imme, I. Iori, G.J. Kunde, W.D. Kunze, V. Lindenstruth, U. Lynen, A. Moroni, W.F.J. Müller, B. Ocker, G. Raciti, H. Sann, C. Schwarz, W. Seidel, V. Serfling, J. Stroth, A. Trzcinski, W. Trautmann, A. Tucholski, G. Verde, B. Zwieglinski
Probing the nuclear liquid-gas phase transition
GSI-Preprint GSI-95-13, Feb. 1995

[Rapa 85] D.C. Rapaport
Monte Carlo experiments on percolation: The influence of boundary conditions
J. Phys. A: Math. Gen. 18 (1985) L175

[Rapa 86] D.C. Rapaport
Cluster number scaling in two-dimensional percolation
J. Phys. A: Math. Gen. 19 (1986) 291

[Rayl 14] Lord Rayleigh
The sand-blast
Nature XCIII (1914) 188

[Ritt 88] H.G. Ritter, S. Albergo, F. Bieser, F.P. Brady, Z. Caccia, D.A. Cebra, A.D. Chacon, J.L. Chance, Y. Choi, S. Costa, J.B. Elliott, M.L. Gilkes, J.A. Hauger, A.S. Hirsch, E.L. Hjort, A. Insolia, M. Justice, D. Keane, J.C. Kintner, V. Lindenstruth, M.A. Lisa, U. Lynen, H.S. Matis, M. McMahan, C. McParland, W.F.J. Müller, D.L. Olson, M.D. Partlan, N.T. Porile, R. Potenza, G. Rai, J. Rasmussen, J. Romanski, J.L. Romero, G.V. Russo, H. Sann, R. Scharenberg, A. Scott, Y. Shao, B.K. Srivastava, T.J.M. Symons, M. Tincknell, C. Tuve, S. Wang, P.G. Warren, H.H. Wieman, K.L. Wolf
Transverse energy and multiplicity distributions in collisions at 60 and 200 GeV per nucleon
Nucl. Phys. A488 (1988) 651c

[Rose 92] F. Rosenberger
Untersuchung und Optimierung eines Vieldraht-Proportionalzählers
Diplomarbeit, Universität Frankfurt(1992)

[Rube 95] T. Rubehn
Elektromagnetische Spaltung und Ladungspickup von ^{238}U *bei* $E/A = 600$ *und 1000 MeV*
Doktorarbeit, Universität Frankfurt(1995)

[Santi 93] A.J. Santiago, K.C. Chung
Do percolative simulations of nuclear fragmentation depend on the lattice structure ?
J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 19 (1993) 349

[Satp 89] L. Satphathy, M. Mishra, R. Nayak
Nuclear liquid-gas phase transition with finite range force
Phys. Rev. C 39 (1989) 162

[Schl 87] T.J. Schlagel und V.R. Pandharipande
Classical simulations of heavy-ion collisions
Phys. Rev. C 36 (1987) 162

[Schü 95] A. Schüttauf
Doktorarbeit, Universität Frankfurt(1995) (in Vorbereitung)

[Siem 83] P.J. Siemens
Liquid gas phase transition in nuclear matter
Nature (London) 305 (1983) 410

[Siem 84] P.J. Siemens
Nuclear fog
Nucl. Phys. A 428 (1984) 189c

[Stan 71] H.E. Stanlay
Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena
Oxford University Press (1971)

[Stau 91] D. Stauffer, A. Aharony
Introduction to Percolation Theory
Taylor & Francis, London (1992)

[Stoc 86] R. Stock
Particle production in high energy nucleus–nucleus collisions
Phys. Reports 135 (1986) 259

[Sümm 90] K. Sümmerer, W. Brüchle, D.J. Morrissey, M. Schädel, B. Szweryn, Y. Weifan
Target fragmentation of Au and Th by 2.6 GeV protons
Phy. Rev. C 42 (1990) 2546

[Tama 93] R. Tamagaki
Chapter I in
Progress of theoretical physics supplements No. 112, 1993

[Wale 93] D.J. Wales und I. Ohmine
Structure, dynamics, and thermodynamics of model $(H_2O)_8$ *and* $(H_2O)_20$ *clusters*
J. Chem. Phys. 98 (1993) 7245

[Wang 94] N. Wang, S. Yang, G. Xu
The liquid-gas phase transition in finite nuclear matter with the Skyrme force
J. Phys. G 20 (1994) 101

[West 76] G.D. Westfall, J. Gosset, P.J. Johansen, A.M. Poskanzer, W.G. Meyer, H.H. Gutbrod, A. Sandoval, R. Stock
Nuclear Fireball Model for Proton Inclusive Spectra from Relatistic Heavy-Ion Collisions
Phys. Rev. Lett. 37, 18 (1976) 1202

[Wils 79] K.G. Wilson
Problems in Physics with Many Scales of Length
Scientific American, Aug. 1979

[Yanu 90] M. Yanuka, R. Englman
Bond-site percolation: empirical representation of critical probabilities
J. Phys. A: Math. Gen. 23 (1990) L339

[Zhen 94] G.T. Zheng
Liquid-gas phase diagrams and Gibbs free energy per nucleon
Phys. Rev. C 50 (1994) 771

[Zinn 93] J. Zinn-Justin
Quantum Field Theory and Critical Phenomena
Oxford University Press (1992)

[Zude 95] E. Zude
Doktorarbeit, Universität Frankfurt(1995) (in Vorbereitung)

Danksagung

An dieser Stelle sei all jenen gedankt, die direkt oder indirekt zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt :

- Meinen Eltern, die mir das Studium ermöglicht haben.
- Meiner Freundin B. Trimborn für die Geduld und das Ertragen manch schlechter Laune.
- Herrn Prof. Dr. U. Lynen für die Themenstellung, sowie für die von ihm ermöglichten großzügigen Arbeitsmöglichkeiten an der GSI in Darmstadt.
- Meinen Kollegen Diplomphysikern A. Schüttauf, W.D. Kunze, C. Groß, B. Ocker, T. Möhlenkamp, T. Rubehn und E. Zude für die gute Zusammenarbeit.
- Herrn Priv. Doz. Dr. habil. J. Pochodzalla für die zahlreichen Diskussionen und die vielfältige Unterstützung beim Anfertigen dieser Arbeit.
- Herrn Dr. W.F.J. Müller für das beständige Interesse an den Ergebnissen dieser Arbeit.
- Sowie allen Mitgliedern der ALADIN-Kollaboration, die zum Erfolg des Experimentes S114 beigetragen haben:

  M. Begemann-Blaich,(1) Th. Blaich,(4) H. Emling,(1) A. Ferrero,(5) C. Groß (1) G. Immé,(6) I. Iori,(5) G.J. Kunde,(1) W.D. Kunze,(1) V. Lindenstruth,(1) U. Lynen,(1) T. Möhlenkamp,(2) A. Moroni,(5) W.F.J. Müller,(1) B. Ocker,(3) J. Pochodzalla,(1) G. Raciti,(6) T. Rubehn,(1) H. Sann,(1) A. Schüttauf,(3) W. Seidel,(2) V. Serfling,(3) J. Stroth,(1) W. Trautmann,(1) A. Trzcinski,(7) G. Verde,(6) B. Zwieglinski,(7) E. Zude(1)

(1)Gesellschaft für Schwerionenforschung, 64220 Darmstadt, Germany
(2)Forschungszentrum Rossendorf, 01314 Dresden, Germany
(3)Institut für Kernphysik,Universität Frankfurt, 60486 Frankfurt, Germany
(4)Institut für Kernchemie, Universität Mainz,55099 Mainz, Germany
(5)Dipartimento di Fisica, Universitá di Milano and I.N.F.N., 20133 Milano, Italy
(6)Dipartimento di Fisica dell' Universitá and I.N.F.N., 95129 Catania, Italy
(7)Soltan Institute for Nuclear Studies, 00 681 Warsaw, Hoza 69, Poland